



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ENERGETICKÝ ÚSTAV**

ENERGY INSTITUTE

**MODELOVÁNÍ TLAKOVÝCH PULSACÍ V POTRUBÍ**

MODELLING OF PRESSURE PULSATIONS IN PIPES

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

MASTER'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Bc. Michal Hofírek**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**Ing. Daniel Himr, Ph.D.**

**BRNO 2017**



## Zadání diplomové práce

Ústav: Energetický ústav  
Student: **Bc. Michal Hofírek**  
Studijní program: Strojní inženýrství  
Studijní obor: Fluidní inženýrství  
Vedoucí práce: **Ing. Daniel Himr, Ph.D.**  
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

### Modelování tlakových pulsací v potrubí

#### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Student se blíže seznámí s problematikou řešení diferenciálních rovnic hyperbolického typu, které popisují vodní ráz. Získá přehled o používaných metodách a sám s nimi bude schopen pracovat. Na teoretickou část bude navazovat i experimentální ověření.

#### Cíle diplomové práce:

- vytvořit matematický popis průběhu vodního rázu v časové oblasti,
- porovnat výsledky s již existujícími modely (metoda charakteristik a metoda Lax-Wendroff)
- provést měření vodního rázu
- upravit parametry modelu tak, aby co nejvěrněji odpovídal experimentálním výsledkům

#### Seznam literatury:

KOYŠ, J. Modelování tlakových pulsací v pružných potrubích. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2007, vedoucí práce Vladimír Habán.

MEDLÍK, J. Modelování tlakových pulsací v pružných potrubích. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2006, vedoucí práce Vladimír Habán.

ZÁRUBA, J. Hydraulický ráz v soustavách potrubí. Academia nakladatelství Československé akademie věd Praha, 1984.

WEINEROWSKA-BORDS, K. Viscoelastic model of waterhammer in single pipeline – problems and questions, Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics 53(4), 2006, pp. 331 - 351, ISSN 1231–3726.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17.

V Brně, dne 2. 11. 2016



doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.  
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

V této diplomové práci je řešena problematika vodního rázu v pružném potrubí s vlivem tuhosti a tlumení v materiálu trubice. Matematický model je zpřesněn o vliv tlakově závislé rychlosti zvuku v kapalině tvořené směsí voda-vzduch. Pro potřeby numerického řešení je odvozeno schéma tzv. zobecněné metody charakteristik s nezávislým časovým krokem. Tato metoda je na jednoduchém příkladu konfrontována s běžně používanou metodou charakteristik a numerickým schématem typu Lax-Wendroff. V závěru práce je odvozený model, řešený zobecněnou metodou charakteristik, experimentálně ověřen.

## **Klíčová slova**

1D proudění, vodní ráz, pružné potrubí, metoda charakteristik s nezávislým časovým krokem, rychlost zvuku

## **Abstract**

This diploma thesis deals with problem of water hammer in pipes affected by viscoelastic behavior of pipe material. Mathematical model uses pressure dependent speed of sound in water-air mixture. For purpose of numerical solution the Method of Characteristics with independent time step is introduced. This method is compared with commonly used methods such as Method of Characteristics (MOC) and Lax-Wendroff scheme. Derived model, solved with Method of Characteristics with independent time step, is verified with experimental simulation.

## **Key words**

1D flow, water hammer, elastic pipe, method of characteristics, MOC with independent time step, speed of sound



### **Bibliografická citace**

HOFÍREK, M. *Modelování tlakových pulsací v potrubí*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. **73** s. Vedoucí diplomové práce Ing. Daniel Himr, Ph. D..





## Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „Modelování tlakových pulsací v potrubí“ vypracoval samostatně, s využitím vlastních znalostí, odborných konzultací a s využitím literatury a pramenů uvedených v seznamu použité literatury.

V Brně dne .....

Bc. Michal Hofírek



## **Poděkování**

Na tomto místě bych chtěl v první řadě poděkovat především panu Ing. Danielu Himrovi, Ph.D. za odborné vedení, podnětné rady a připomínky k vypracování mé diplomové práce. Poděkování patří také rodině a přátelům za neutuchající podporu a důvěru v průběhu celého studia.



## Obsah

1	Úvod.....	15
2	Rovnice kontinuity .....	17
2.1	Odvození základního tvaru rovnice kontinuity.....	17
2.2	Odvození deformace materiálu trubice .....	20
2.3	Reologický model materiálu trubice .....	21
2.4	Rovnice kontinuity s vlivem pružnosti potrubí .....	24
3	Rychlost zvuku v kapalině.....	27
4	Rovnice silové rovnováhy .....	29
5	Numerické řešení .....	31
5.1	Zobecněná metoda charakteristik.....	31
5.2	Rozepsání do maticového tvaru .....	33
5.3	Aplikace UPWIND schématu .....	34
5.4	Určení vztahů pro výpočet hodnot ve vnitřních bodech .....	36
5.5	Určení okrajových podmínek .....	38
5.6	Okrajová podmínka na začátku potrubí .....	40
5.7	Okrajová podmínka na konci potrubí .....	42
5.8	Ošetření pravé strany rovnice kontinuity.....	44
5.9	Určení časového kroku .....	46
6	Vlastnosti numerického schématu.....	47
6.1	Vliv Courantova čísla .....	48
6.2	Porovnání s obecnou metodou charakteristik.....	50
6.3	Porovnání s numerickou metodou Lax-Wendroff .....	53
7	Experimentální ověření .....	55
7.1	Popis zkušební tratě .....	55
7.2	Postup měření .....	56
7.3	Použitá měřicí technika.....	57
7.4	Parametry získané z laboratorního měření .....	57
7.5	Zavírání spodního ventilu.....	59
7.6	Zavírání horního ventilu .....	61
8	Závěr.....	65
9	Seznam použité literatury.....	67
10	Seznam použitých symbolů a zkratek.....	69
11	Přílohy.....	73



## 1 Úvod

Při numerickém modelování tlakových pulsací v potrubí je nutné již v počátku tvorby matematického aparátu brát v potaz vlivy, které je nutné do řešení zahrnout. V posledních dvaceti letech je většina nově vznikajících potrubních systémů tvořena plastovými trubicemi a potrubními prvky, které, na rozdíl od dříve hojně používaných kovových materiálů, mají podstatně vyšší poddajnost a vliv tlumení v materiálu hraje větší roli, než tomu bylo u čistě kovových potrubí. Při projektování takových systémů je často nutné znát průběh tlakových pulsací při přechodných provozních stavech ideálně již ve fázi projektu. Dodnes neexistuje jednoznačný přístup a universální metoda, která by dokázala vždy pro jakýkoli systém predikovat přesné hodnoty tlakových špiček. Nejpresnějších výsledků je dosaženo při konfrontaci s experimentem, na jehož základě se model kalibruje. Tomuto problému se ve své práci věnuje Ing. Panko, z jehož poznatků je v této práci vycházeno [1]. Oproti modelu použitému v jeho práci je navíc zahrnut vliv gravitace a proměnné rychlosti zvuku v kapalině, která je tvořena směsí voda-vzduch.

Pro numerické řešení vodního rázu je v této práci použito modifikované metody charakteristik. Ta nemá pevně daný vztah mezi rychlostí zvuku v systému, velikostí časového a prostorového kroku. Tato, tzv. zobecněná metoda charakteristik, vychází z aplikace numerické metody UPWIND, která je formálně upravena do tvaru, který je shodný s obecnou metodou charakteristik. Jedním z témat této práce je porovnání chování tohoto numerického schématu s běžně používanou metodou charakteristik a numerickým schématem Lax-Wendroff.

V závěru práce je rovněž numerický model konfrontován s daty získanými z experimentu na jednoduché úloze.

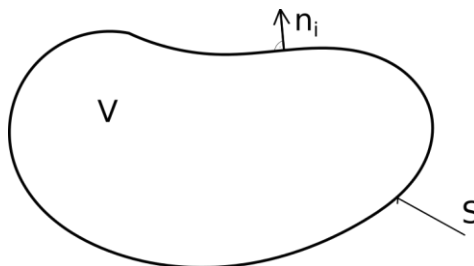




## 2 Rovnice kontinuity

### 2.1 Odvození základního tvaru rovnice kontinuity

Odvození rovnice ve tvaru, který je dále používán, je provedeno na obecném objektu se spojitým objemem  $V$ , který je ohraničen plochou  $S$ , která je orientována vnějším jednotkovým normálovým vektorem  $n_i$ .



Obrázek 1 Obecná část kontinua

Změna hmotnosti v čase je možná pouze skrze tok hmoty plochou stěny  $S$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \rho v_i n_i dS = 0 \quad (2.1)$$

Protože se jedná o spojitou hranici, lze zpětně upravit pomocí Gaussovy-Ostrogradského věty.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_V \frac{\partial v_i \rho}{\partial x_i} dV = 0 \quad (2.2)$$

Pro velice malé objemy lze psát rovnici kontinuity v obecném tvaru:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v_i \rho}{\partial x_i} = 0 \quad (2.3)$$

Druhý člen upravíme jako derivaci součinu a získáváme výraz:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \rho = 0 \quad (2.4)$$

První dva členy zapíšeme pomocí substancionální derivace:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.5)$$

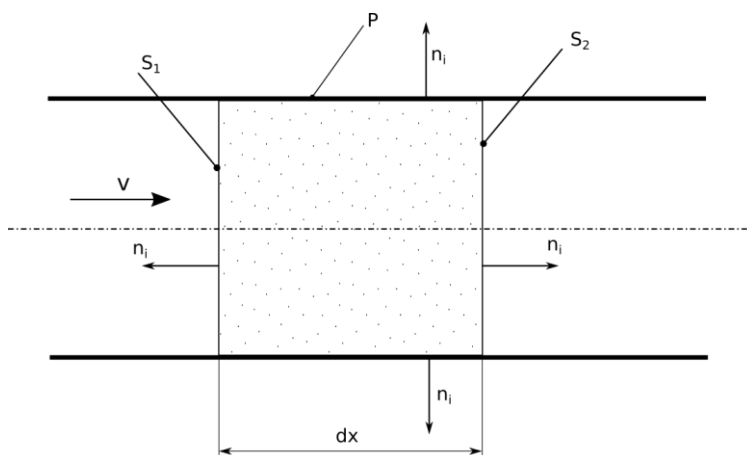
Při uvažování adiabatického děje lze zapsat rychlost zvuku v kapalině dle vztahu:

$$v_w = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \quad (2.6)$$

Po jednoduché úpravě a dosazení do rovnice (2.5) získáme následující tvar:

$$\frac{1}{v_w^2} \frac{dp}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.7)$$

Nyní je obecný objem  $V$  nahrazen objemem kapaliny uzavřeným v trubici, kde je povrch  $S$  tvořen z následujících dílčích ploch:



Obrázek 2 Orientace kapaliny uzavřené trubicí

Rovnici (2.7) integrujeme přes celý objem a použijeme Gaussovu-Ostrogradského větu.

$$\frac{1}{v_w^2} \int_V \frac{dp}{dt} dV + \int_{S=S_1 \cup S_2 \cup P} \rho v_i n_i dS = 0 \quad (2.8)$$

Za předpokladu, že časová derivace tlaku je ve smyslu střední hodnoty můžeme dále psát:

$$\frac{1}{v_w^2} \frac{dp}{dt} V + \int_{S_1} \rho v_i n_i dS + \int_{S_2} \rho v_i n_i dS + \int_P \rho v_i n_i dS = 0 \quad (2.9)$$

Po integraci je tvar rovnice následující:

$$\frac{1}{v_w^2} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot V - \rho \cdot Q_1 + \rho \cdot Q_2 + \rho \int_P v_i n_i dS = 0 \quad (2.10)$$

Vztah mezi průtoky  $Q_1$  a  $Q_2$  je vyjádřen jako přírůstek ve směru  $x$ :

$$Q_2 = Q_1 + \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \quad (2.11)$$

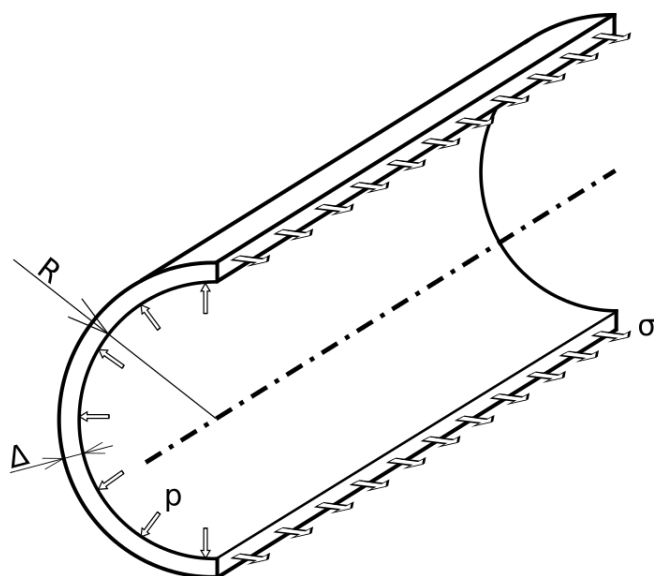
Po úpravě a dosazení do vztahu (2.10) a podělením délkovým elementem  $dx$  získáváme prozatím konečnou formu rovnice kontinuity.

$$\frac{1}{v_w^2} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot S(x, t) + \rho \cdot \frac{\partial Q}{\partial x_i} + \rho \cdot \frac{\int_P v_i n_i dS}{dx} = 0 \quad (2.12)$$

## 2.2 Odvození deformace materiálu trubice

V celém následujícím řešení bude uvažováno potrubí kruhového průřezu o tloušťce stěny  $\Delta$ , která je oproti vnitřnímu průměru potrubí zanedbatelně malá, platí tedy předpoklad:

$$\Delta \ll D \sim (2R) \quad (2.13)$$



Obrázek 3 Řez trubicí zatíženou vnitřním přetlakem

Potrubí je zatíženo vnitřním přetlakem, který způsobuje jeho deformaci. Předpokládá se deformace v radiálním směru, jejíž velikost je stejná jako deformace obvodu trubky, tedy:

$$O + O \cdot \varepsilon = 2 \cdot \pi \cdot (R + R \cdot \varepsilon) \quad (2.14)$$

Po úpravě lze psát:

$$O \cdot (1 + \varepsilon) = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot (1 + \varepsilon) \quad (2.15)$$

Z výrazu je patrné, že část  $R \cdot (1 + \varepsilon)$  představuje velikost nového poloměru trubice zatížené vnitřním tlakem. Derivací tohoto členu podle času je získána rychlost deformace trubice:

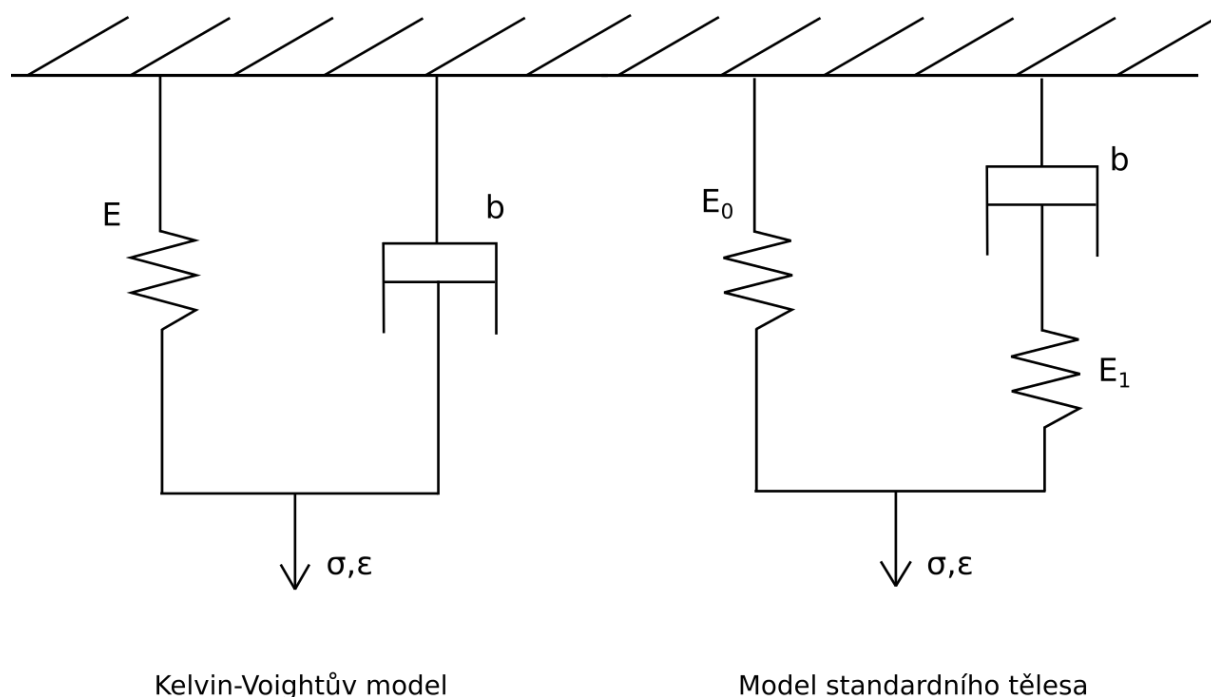
$$v_i = \frac{\partial [R \cdot (1 + \varepsilon)]}{\partial t} = R \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = R \cdot \dot{\varepsilon} \quad (2.16)$$

Z kotlového vzorce pro těleso zatížené vnitřním přetlakem lze získat vztah mezi napětím v materiálu a vnitřním tlakem:

$$\sigma = \frac{R \cdot p}{\Delta} \quad (2.17)$$

## 2.3 Reologický model materiálu trubice

Při návrhu modelu hydraulického rázu je vhodné pracovat i s vlivem vlastností potrubního řádu. Dnes velmi běžně používané plastové a pryžové rozvody mají oproti dříve používaným kovovým řádům výrazně menší tuhost, kterou není vhodné při vyhodnocování dynamických jevů zanedbat. Do matematického modelu je tedy nasnadě zavést vliv materiálu potrubí pomocí reologických modelů. Jak je blíže popsáno v dříve vypracovaných pracích Ing. Panka, Ing. Šebesty a Ing. Medlíka [1] [2] [3], bude použit Kelvin-Voigtův model tělesa, který sestává z paralelně zapojeného členu tuhosti a tlumení, viz obrázek.



Obrázek 4 Reologické modely tělesa

Použití komplikovanějších modelů je pro případ modelování pružného potrubí přípustné, ale jak je uvedeno v [4], vyvstává celá řada problémů s určením jednotlivých parametrů prvků v modelu. Reologický model materiálu je totiž pouhým přiblížením mechanických vlastností skutečného tělesa, které vycházejí z chemických a strukturních vazeb uvnitř materiálu. Jednotlivé prvky v reologickém modelu tedy nemají přímou fyzikální předlohu a jejich určení je značně komplikované. Většinou se jedná o optimalizační metody, které hledají nejvhodnější kombinaci jednotlivých vlastností, které mohou vyhovovat po stránce numerické, ale nikoli fyzikální. V [4] dále autorka uvádí, že při konfrontaci matematického modelu s reálným měřením nedochází k velkým chybám, pracuje-li se právě s jednoduchým Kelvin-Voigtovým modelem tělesa, což je ve shodě se závěry uváděnými v práci Ing. Šebesty a Ing. Medlíka. Z jejich závěrů plyne, že vliv tuhosti zařazené do série s tlumením je oproti tuhosti paralelně řazené pružiny zanedbatelně malý [2] [3].

Následující odvození vychází z práce Ing. Panka [1]. Matematicky lze Kelvin-Voigtův model popsat následujícím vztahem:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon + b \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (2.18)$$

Po provedení Laplaceovy transformace podle času získáme:

$$\tilde{\sigma} = E \cdot \tilde{\varepsilon} + s \cdot b \cdot \tilde{\varepsilon} \quad (2.19)$$

Z rovnice vyjádříme obraz celkové poměrné deformace jako:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\sigma}}{E + b \cdot s} \quad (2.20)$$

Z rovnice (2.20) lze vyjádřit vztah pro celkovou tuhost systému.

$$E_c = E + b \cdot s \quad (2.21)$$

Zpětnou Laplaceovou transformací převrácené hodnoty celkové tuhosti systému dostáváme:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{E_c} \right\} = \frac{1}{b} \cdot e^{-\frac{E}{b}t} \quad (2.22)$$

Ze vztahu (2.22) je patrný důležitý předpoklad, a to že parametry tuhosti a tlumení nejsou funkcí času - jedná se tedy o konstanty, jejichž hodnota je nezávislá na zatěžování. Jak je zmíněno výše, reologické modely nezastupují přímo měřitelnou fyzikální veličinu, a proto je tento předpoklad a jeho vliv obtížné ověřit. S ohledem na jeho zjednodušující vliv je ale s tímto předpokladem dále pracováno.

Po zpětné Laplaceově transformaci s aplikací konvolučního integrálu získáváme celkovou poměrnou deformaci:

$$\varepsilon = \int_0^t \frac{1}{b} e^{-\frac{E}{b}\tau} \cdot \sigma(t - \tau) d\tau \quad (2.23)$$

Pro další použití je nutné určit časovou derivaci celkové poměrné deformace, ke které použijeme Duhamelův vzorec [5, s. 111]:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{b} \left[ \int_0^t \frac{d\sigma(t - \tau)}{dt} \cdot e^{-\frac{E}{b}\tau} \cdot d\tau + \sigma(0) \cdot e^{-\frac{E}{b}t} \right] \quad (2.24)$$

Po dosazení napětí z rovnice (2.17) do vztahu (2.24) dostaneme následující vztah:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{R}{\Delta \cdot b} \left[ \int_0^t \frac{dp(t-\tau)}{dt} \cdot e^{-\frac{E}{b}\tau} \cdot d\tau + p(0) \cdot e^{-\frac{E}{b}t} \right] \quad (2.25)$$

Po dalších úpravách, které jsou blíže popsány v [1] dostáváme výsledný tvar časové derivace poměrné deformace - tedy rychlosti deformace stěny trubice:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{R}{\Delta \cdot E} \cdot \left[ 1 - e^{-\frac{E}{b}\Delta t} \right] \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{R}{\Delta \cdot b} \cdot \left[ \int_{\Delta t}^t \frac{dp(t-\tau)}{dt} \cdot e^{-\frac{E}{b}\tau} \cdot d\tau + p(0) \cdot e^{-\frac{E}{b}t} \right] \quad (2.26)$$

## 2.4 Rovnice kontinuity s vlivem pružnosti potrubí

V následující kapitole je odvozen tvar rovnice kontinuity s vlivem pružného potrubí, které je simulováno pomocí Kelvin-Voigtova reologického modelu materiálu. Odvození vychází ze vztahů uvedených v [1], vyzdviženy jsou nejzásadnější kroky a předpoklady.

Integrál v posledním členu rovnice (2.12) představuje vliv pružnosti stěny potrubí. Pro dokonale tuhé stěny je tento výraz roven nule. V modelovaném příkladu nelze tento člen zanedbat. V kapitole 2.2 je odvozen vztah pro rychlost deformace trubice. Po dosazení do integrálu v rovnici (2.12) a provedení integrace přes plochu stěny trubice  $P$ , získáváme následující tvar rovnice kontinuity:

$$\frac{1}{v_w^2} \frac{dp}{dt} S(x, t) + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} + \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad (2.27)$$

Za rychlost deformace dosadíme vztah (2.26) získaný z odvození reologického modelu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_w^2} \cdot \frac{dp}{dt} \cdot S(x, t) + \rho \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} + \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \frac{R}{\Delta \cdot E} \cdot \left[ 1 - e^{-\frac{E}{b} \Delta t} \right] \cdot \frac{dp}{dt} + \dots \\ \dots + \frac{R}{\Delta \cdot b} \cdot \left[ \int_{\Delta t}^t \frac{dp(t - \tau)}{dt} \cdot e^{-\frac{E}{b} \tau} \cdot d\tau + p(0) \cdot e^{-\frac{E}{b} t} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

V dalším kroku je zaveden předpoklad malých deformací tloušťky stěn. V důsledku přejde vztah pro průřez trubice pouze do funkční závislosti na poloze a nikoli na tlaku, tedy  $S(x, t) = S(x) = \pi R^2$ .

Po podělení plochou  $S$  a hustotou  $\rho$ , roznásobením a převedení konvolučního integrálu na pravou stranu, lze napsat rovnici kontinuity ve tvaru:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{\rho \cdot v_w^2} + 2 \cdot \frac{R}{\Delta \cdot E} \cdot \left[ 1 - e^{-\frac{E}{b} \Delta t} \right] \right\} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = \dots \\ \dots = - \frac{2 \cdot R}{\Delta \cdot b} \cdot \left[ \int_{\Delta t}^t \frac{dp(t - \tau)}{dt} \cdot e^{-\frac{E}{b} \tau} \cdot d\tau + p(0) \cdot e^{-\frac{E}{b} t} \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

Pro jednodušší orientaci je zavedena substituce, díky které přechází rovnice do tvaru:

$$\frac{1}{k} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} = l \quad (2.30)$$



Po přepisu pomocí substancionální derivace a roznásobení jednotlivých členu:

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{Q}{S} + \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = l \quad (2.31)$$

Jak je podrobně odvozeno v [1], první dva členy v rovnici (2.31) lze zapsat:

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{Q}{S} \cong \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \left( 1 + \frac{c}{v_m} \right) \quad (2.32)$$

Kde výraz  $\frac{c}{v_m}$  vyjadřuje poměr mezi rychlostí proudění a rychlostí zvuku v materiálu trubice. Jelikož rychlost proudění je řádově menší než rychlost zvuku v materiálu, lze tento zlomek považovat za mnohem menší než 1. Díky tomu vypadne v rovnici (2.31) nelineární člen. Po jednoduché matematické úpravě je tak získán konečný tvar rovnice kontinuity:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{k}{S} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = l \cdot k \quad (2.33)$$



### 3 Rychlost zvuku v kapalině

Při vyhodnocování vodního rázu hraje významnou roli rychlost zvuku v kapalině, která je ovšem silně závislá jak na teplotě, tak především na koncentraci rozpuštěného vzduchu ve vodě. Proto je třeba tento fyzikální jev zahrnout do konstruktu matematického modelu. Jak je uvedeno výše, při odvozování rovnice kontinuity, je celý děj uvažován jako adiabatický. Při následujícím odvození vycházíme z práce [6].

Obecně je rychlost v prostředí definována jako odmocnina z podílu modulu objemové stlačitelnosti a měrné hmotnosti média [7]:

$$v_{zv} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (3.1)$$

Pro rychlost zvuku ve směsi vody a vzduchu se vychází z upraveného tvaru rovnice (3.1):

$$v_s^2 = \frac{K_s}{\rho_s} \quad (3.2)$$

Pro zjištění celkové hustoty směsi je použito definičního vztahu hustoty a stavové rovnice ideálního plynu:

$$\rho_s = \frac{m_s}{V_s} = \frac{m_w + m_{vz}}{V_w + V_{vz}} = \frac{m_w + m_{vz}}{\frac{m_w}{\rho_w} + \frac{m_{vz} \cdot r \cdot T}{p}} \quad (3.3)$$

Hmotnosti jednotlivých složek v rovnici (3.3) je upravena na hmotnostní zlomky:

$$\rho_s = \frac{M_w + M_{vz}}{\frac{M_w}{\rho_w} + \frac{M_{vz} \cdot r \cdot T}{p}} \quad (3.4)$$

Z definice hmotnostního zlomku vyplývá vztah  $M_w + M_{vz} = 1$ , kterým je podělen čítec a jmenovatel ve vztahu (3.4) a po úpravě tak přechází do tvaru:

$$\rho_s = \frac{\rho_w \cdot p}{(1 - M_{vz}) \cdot p + M_{vz} \cdot r \cdot T \cdot \rho_w} \quad (3.5)$$

Obdobně je odvozen i modul objemové pružnosti směsi:

$$\frac{1}{K_s} = \frac{O_w}{K_w} + \frac{O_{vz}}{K_{vz}} \quad (3.6)$$

Při adiabatickém ději platí následující vztahy pro moduly objemové pružnosti jednotlivých komponent směsi:

$$K_{vz} = \kappa \cdot p \quad (3.7)$$

$$K_v = v_w^2 \rho_w \quad (3.8)$$

Po dosazení do rovnice (3.6) pak dostáváme vztah, který lze upravit pomocí definičních vztahů objemových zlomků a stavové rovnice obdobným způsobem, jako je naznačeno výše u rovnice určující hustotu směsi. Po jednoduchých matematických úpravách tak přechází vztah pro modul objemové pružnosti směsi ke konečnému tvaru:

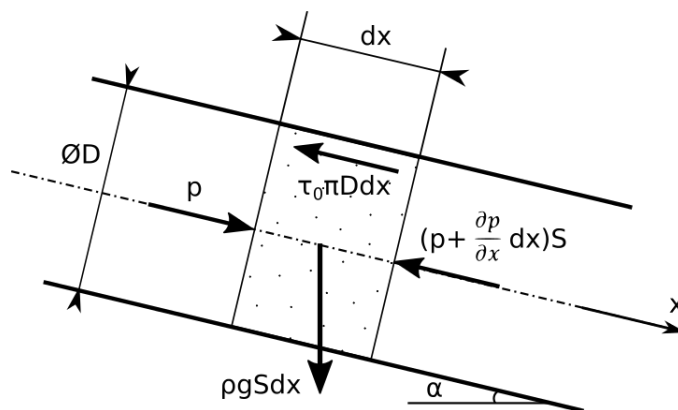
$$K_s = \frac{[(1 - M_{vz}) \cdot p + M_{vz} \cdot r \cdot T \cdot \rho_w] \cdot v_w^2 \cdot \kappa \cdot \rho_w \cdot p}{(1 - M_{vz}) \cdot \kappa \cdot p^2 + M_{vz} \cdot r \cdot T \cdot v_w^2 \cdot \rho_w^2} \quad (3.9)$$

Takto získané vztahy pro hustotu směsi a objemový modul pružnosti směsi jsou dosazeny do rovnice (3.2) a po vykrácení a zjednodušení zlomků je získán konečný vztah pro rychlost zvuku ve směsi voda vzduch jako funkce tlaku, teploty a hmotnostního zlomku vzduchu:

$$v_s = \sqrt{\frac{[(1 - M_{vz}) \cdot p + M_{vz} \cdot r \cdot T \cdot \rho_w]^2 \cdot \kappa \cdot v_w^2}{[(1 - M_{vz}) \cdot \kappa \cdot p^2 + M_{vz} \cdot r \cdot T \cdot v_w^2 \cdot \rho_w^2]}} \quad (3.10)$$

## 4 Rovnice silové rovnováhy

Druhou rovnicí, kterou bude popsán hydraulický ráz, je rovnice silové rovnováhy, která je reprezentována modifikovaným tvarem Navierovy—Stokesovy rovnice. Při odvození je vycházeno z rovnice silové rovnováhy na elementárním objemu kapaliny uzavřeného trubicí konstantního kruhového průřezu.



Obrázek 5 Silová rovnováha na elementu

Do rovnice vstupují plošné síly tlakové a od smykového napětí na stěnách trubice, dále objemové síly tíhové a setrvačné:

$$\vec{F}_p + \vec{F}_g + \vec{F}_T + \vec{F}_S = 0 \quad (4.1)$$

Při uvažování proudění v kladném směru osy  $x$  lze s přihlédnutím k výše uvedenému obrázku zapsat rovnici (4.1) ve tvaru:

$$p \cdot S - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot S + S \cdot \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot dx - \tau \cdot \pi \cdot D \cdot dx - \rho \cdot S \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dx = 0 \quad (4.2)$$

Podělením plochou průřezu, elementárním rozměrem  $dx$  a drobné matematické úpravě, přechází rovnice do tvaru:

$$\rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\tau \cdot \pi \cdot D}{S} + \frac{\partial p}{\partial x} - \rho \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \quad (4.3)$$

Při předpokladu, že rychlost proudění je podstatně nižší než rychlost šíření tlakové vlny v kapalině, lze zanedbat nelineární člen.

Smykové napětí v kapalině lze zapsat pomocí následujícího vztahu [8]. Důležitým předpokladem je skutečnost, že součinitel délkových ztrát, respektive jeho hodnota, je uvažována jako konstantní a shodná s hodnotou při statickém ději, byť se jedná, v případě hydraulického rázu, o děj výrazně dynamický.

$$\tau = \frac{\lambda}{8} \cdot \rho \cdot |v| \cdot v \quad (4.4)$$

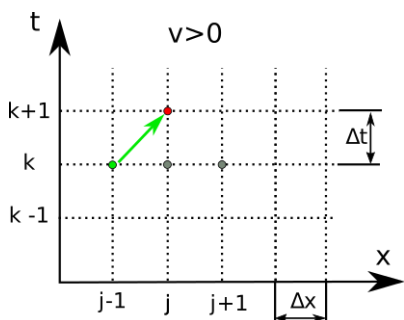
Po dosazení do rovnice (4.3), podělením hustotou a vynásobením plochou průřezu  $S$ , získáváme konečný tvar rovnice silové rovnováhy:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{S}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| \cdot Q = S \cdot g \cdot \sin \alpha \quad (4.5)$$

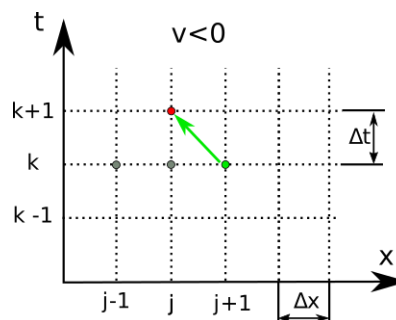
## 5 Numerické řešení

### 5.1 Zobecněná metoda charakteristik

Obecná metoda charakteristik je dobře popsána metoda řešení problematiky modelování vodního rázu. Spočívá v hledání hodnot tlaku a průtoku v průsečících charakteristik tvořících síť v rovině polohy a času. Tlak a průtok jsou počítány na základě znalosti hodnot v předchozích časových hladinách v jiných bodech sítě, které ovšem leží na stejných charakteristikách. Pro svou jednoduchost byla volena jako jedna z prvních metod pro strojový výpočet v 80. letech minulého století a nahradila tak dříve používané grafické metody. [8]



Obrázek 6 Metoda charakteristik - kladný směr



Obrázek 7 Metoda charakteristik - záporný směr

Při řešení se na počátku uvažuje s předpokladem, že rovnice kontinuity a silové rovnováhy jsou lineárně závislé a to právě podél charakteristické přímky. Z tohoto předpokladu ovšem vychází jednoznačný vztah mezi časovým a prostorovým krokem, který je dán následovně:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{|v_s|} \quad (5.1)$$

Jelikož rychlost zvuku v médiu, tedy rychlost šíření informace v systému, je pevně dána fyzikálními zákony a konstitucí řešeného problému, je patrné, že zbývá pouze jeden stupeň volnosti při volbě časového nebo prostorového kroku. Tato skutečnost nepředstavuje velký problém při řešení jednoduché soustavy, kupříkladu rovného úseku potrubí konstantního průřezu bez jakýchkoli armatur nebo jiných potrubních prvků. Problém nastává, budeme-li chtít navázat na sebe více úseků s různou geometrií. Jako ukázkový příklad lze uvést dva na sebe navazující úseky potrubí o jiných průřezích a délkách, které je dokonale tuhé. Jelikož je rychlost šíření informace v celém systému stejná, je patrné, že nelze v obou úsecích dodržet shodnou velikost jak časového, tak prostorového kroku. Tato skutečnost může vést k nepřesnostem a zkreslení výsledků.

Tento problém je vhodné obejít metodou, u které nebude nutno zachovat prostorový a časový krok přesně podle předpisu (5.1), ale která se bude řídit pouze Courantovou podmínkou stability systému pro Courantova čísla  $C$  náležící do intervalu  $(0,1)$ .

$$\Delta t = C \cdot \frac{\Delta x}{|v_s|} \quad (5.2)$$

Při odvození obecné metody charakteristik získáme ve finální úpravě dvě rovnice, jednu pro kladný a druhou pro záporný směr šíření informací. Jejich součtem je získána hodnota průtoku, rozdílem těchto rovnic hodnota tlaku v další časové hladině. V následujících kapitolách jsou popsány dílčí kroky, které vedou k principiálně shodnému řešení, ovšem bez nutnosti dodržet podmínku (5.1).



## 5.2 Rozepsání do maticového tvaru

Pro použití kterékoli numerické metody je vhodné zapsat obě rovnice, kontinuity (2.33) a silové rovnováhy (4.5), do jedné rovnice v maticovém tvaru. Vektor neznámých je definován následovně:

$$w = \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Matici konstant, které po roznásobení případnou k časové derivaci, je zapsána ve tvaru:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{\rho} \\ \frac{k}{S} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Další matice konstant, které jsou pouze roznásobeny vektorem neznámých, je určena následovně:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2DS} |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Jako poslední zbývá definovat vektor pravých stran, který definuje vliv tíhového zrychlení a konvoluce. Ten nabývá tvaru:

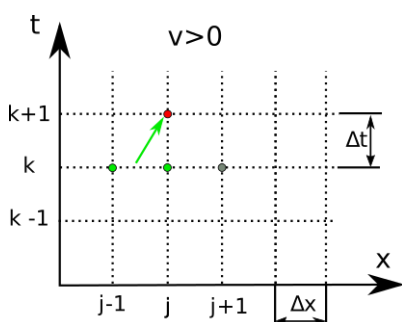
$$z = \begin{pmatrix} S \cdot g \cdot \sin \alpha \\ l \cdot k \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Pomocí výše definovaných vektorů a matic, lze rovnici kontinuity a silové rovnováhy psát současně v tomto maticovém zápisu:

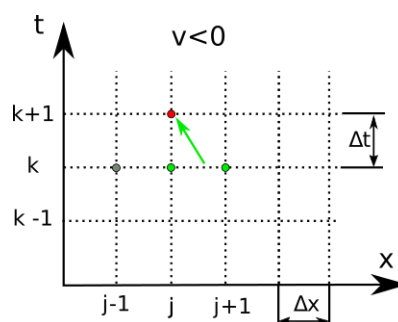
$$\frac{\partial}{\partial t} w + K \frac{\partial}{\partial x} w + B w = z \quad (5.7)$$

### 5.3 Aplikace UPWIND schématu

Schéma typu UPWIND je díky své jednoduchosti a robustnosti poměrně rozšířený nástroj pro numerické řešení matematických problémů. Svůj název dostalo podle skutečnosti, že hodnoty v další časové hladině jsou šířeny z bodů, které leží proti směru šíření informace v systému, jak je znázorněno na následujících ilustracích.



Obrázek 8 UPWIND - kladný směr



Obrázek 9 UPWIND - záporný směr

Bližší odvození metody UPWIND je dohledatelné například v [9]. Pro jednoduchost uvažujme proměnnou  $u$ . Přejdeme-li ze spojitého časoprostoru do prostoru konečných časových a prostorových diferencí (viz Obrázek 8), lze Taylorův rozvoj pro další časový krok (zde hladina  $k+1$ ) zapsat v následujícím tvaru:

$$u_j^{k+1} = u_j^k + \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^k \cdot \Delta t \quad (5.8)$$

Jednoduchou úpravou lze získat předpis pro časovou derivaci, a to ve tvaru:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} \quad (5.9)$$

Pro prostorovou derivaci lze postupovat obdobně, ale zde je nutné rozlišovat mezi kladným a záporným směrem šíření informace v systému. Pro kladný směr pak platí:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^k = \frac{u_j^k - u_{j-1}^k}{\Delta x} \quad (5.10)$$

Pro záporný směr lze analogicky určit změnu proměnné  $u$  podle směru následovně:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_j^k = \frac{u_{j+1}^k - u_j^k}{\Delta x} \quad (5.11)$$

Osamostatněním časové derivace z rovnice (5.7) na levou stranu rovnice, je získán tvar:

$$\frac{\partial}{\partial t} w = -K \frac{\partial}{\partial x} w - Bw + z \quad (5.12)$$

Pro kladný směr je dosazeno za časové a prostorové derivace ze vztahů (5.9) a (5.10). Tím nabude rovnice tvaru:

$$\frac{w_j^{k+1} - w_j^k}{\Delta t} = -K \cdot \left( \frac{w_j^k - w_{j-1}^k}{\Delta x} \right) - B \cdot w_j^k + z \quad (5.13)$$

Po drobné matematické úpravě lze získat vztah pro vektor proměnných v další časové hladině při předpokladu šíření informace v kladném směru prostorové souřadnice  $x$ .

$$w_j^{k+1} = w_j^k - K \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (w_j^k - w_{j-1}^k) - B \cdot w_j^k \cdot \Delta t + z \cdot \Delta t \quad (5.14)$$

Při šíření informace proti smyslu orientace kladného směru prostorové souřadnice vznikne tvar:

$$w_j^{k+1} = w_j^k - K \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (w_{j+1}^k - w_j^k) - B \cdot w_j^k \cdot \Delta t + z \cdot \Delta t \quad (5.15)$$

#### 5.4 Určení vztahů pro výpočet hodnot ve vnitřních bodech

Rozepsáním maticového vyjádření rovnice (5.14) je získán kompletní zápis pro kladný směr:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_j^{k+1} &= \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_j^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{\rho} \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_j^k - \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_{j-1}^k \right] - \dots \\ &\dots - \Delta t \cdot \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_j^k + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} S \cdot g \cdot \sin \alpha \\ l \cdot k \end{pmatrix}_j^k \end{aligned} \quad (5.16)$$

Druhý člen na pravé straně rovnice lze po rozepsání následovně roznásobit:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{S}{\rho} \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_j^k - Q_{j-1}^k \\ p_j^k - p_{j-1}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{S}{\rho} \cdot (p_j^k - p_{j-1}^k) \\ k \cdot (Q_j^k - Q_{j-1}^k) \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

Pro kladný směr šíření informace je prostým roznásobením získán výraz pro hodnotu průtoku v nové časové hladině jako:

$$Q_j^{k+1} = Q_j^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{S}{\rho} \cdot (p_j^k - p_{j-1}^k) - \Delta t \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \cdot |Q_j^k| \cdot Q_j^k + \Delta t \cdot S \cdot g \cdot \sin \alpha \quad (5.18)$$

Obdobně je docíleno vztahu pro tlak při kladném směru šíření informace:

$$p_j^{k+1} = p_j^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{k}{S} \cdot (Q_j^k - Q_{j-1}^k) + \Delta t \cdot (l \cdot k)_j^k \quad (5.19)$$

Pro lepší orientaci v následujících úpravách je zavedena substituce za některé konstanty, které vystupují v rovnicích (5.18) a (5.19).

$$a_Q = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{S}{\rho} \quad (5.20)$$

$$b_Q = \Delta t \cdot \frac{\lambda}{2 \cdot D \cdot S} \quad (5.21)$$

$$c_p = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{k}{S} \quad (5.22)$$

Díky výše uvedeným krokům je tak získána sada rovnic pro kladný směr šíření informace ve výpočetním prostoru:

$$Q_j^{k+1} = Q_j^k - a_Q \cdot (p_j^k - p_{j-1}^k) - b_Q \cdot |Q_j^k| \cdot Q_j^k + \Delta t \cdot S \cdot g \cdot \sin \alpha \quad (5.23)$$

$$p_j^{k+1} = p_j^k - c_p \cdot (Q_j^k - Q_{j-1}^k) + \Delta t \cdot (l \cdot k)_j^k \quad (5.24)$$

Analogicky odvozením rovnic pro kladný směr šíření, lze získat i rovnice pro záporný směr šíření informací v systému. Po několika algebraických úpravách tak vzniknou rovnice:

$$Q_j^{k+1} = Q_j^k - a_Q \cdot (p_{j+1}^k - p_j^k) - b_Q \cdot |Q_j^k| \cdot Q_j^k + \Delta t \cdot S \cdot g \cdot \sin \alpha \quad (5.25)$$

$$p_j^{k+1} = p_j^k - c_p \cdot (Q_{j+1}^k - Q_j^k) + \Delta t \cdot (l \cdot k)_j^k \quad (5.26)$$

Rovnice pro tlak a průtok v jednom směru šíření informace lze sjednotit do jedné, a tím je získána jedna rovnice o dvou neznámých. Pro kladný směr vypadá rovnice po několika prostých úpravách následovně:

$$\begin{aligned} Q_j^{k+1} - Q_j^k - a_Q \cdot p_{j-1}^k + a_Q \cdot p_j^{k+1} + a_Q \cdot c_p \cdot Q_j^k - \dots \\ \dots - a_Q \cdot c_p \cdot Q_{j-1}^k - a_Q \cdot \Delta t \cdot (l \cdot k)_j^k + \dots \\ \dots + b_Q \cdot |Q_j^k| \cdot Q_j^k - \Delta t \cdot S \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

Rovnici lze dále zjednodušit vytknutím některých konstant, ale pro potřeby dalších úprav je ponechána v uvedeném tvaru. Analogicky lze získat jednu rovnici o dvou neznámých i pro záporný směr šíření informace:

$$\begin{aligned} Q_j^{k+1} - Q_j^k + a_Q \cdot p_{j+1}^k - a_Q \cdot p_j^{k+1} + a_Q \cdot c_p \cdot Q_j^k - \dots \\ \dots - a_Q \cdot c_p \cdot Q_{j+1}^k + a_Q \cdot \Delta t \cdot (l \cdot k)_j^k + \dots \\ \dots + b_Q \cdot |Q_j^k| \cdot Q_j^k - \Delta t \cdot S \cdot g \cdot \sin \alpha = 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Rovnice (5.27) společně s rovnicí (5.28) představují soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, průtoku  $Q$  v poloze  $j$  a čase  $k+1$ , a tlaku  $p$  v poloze  $j$  a čase  $k+1$ . Tyto dvě rovnice formálně tvoří stejnou soustavu jako u obecné metody charakteristik. Součtem těchto rovnic je tak získán vztah pro průtok ve vnitřním bodu výpočetní domény:

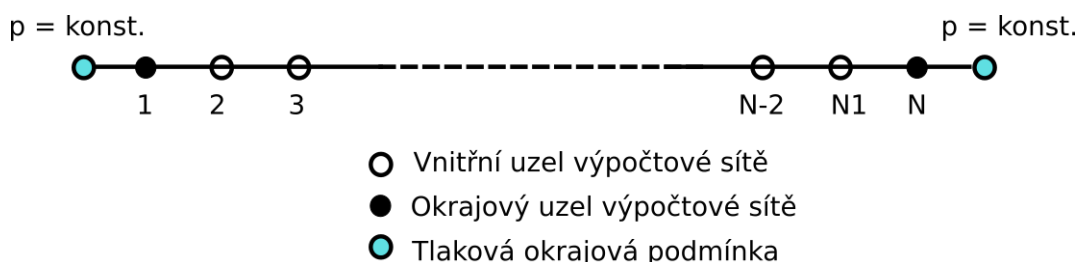
$$\begin{aligned} Q_j^{k+1} = Q_j^k - \frac{a_Q}{2} \cdot (p_{j+1}^k - p_{j-1}^k) - a_Q \cdot c_p \cdot Q_j^k + \frac{a_Q \cdot c_p}{2} \cdot (Q_{j+1}^k + Q_{j-1}^k) \\ \dots \\ \dots - b_Q \cdot |Q_j^k| \cdot Q_j^k + \Delta t \cdot S \cdot g \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (5.29)$$

Pokud jsou od sebe výše uvedené rovnice odečteny, vznikne druhý nezbytný vztah a to pro tlak ve vnitřních bodech:

$$p_j^{k+1} = \frac{1}{2} \cdot (p_{j-1}^k + p_{j+1}^k) + \frac{c_p}{2} \cdot (Q_{j-1}^k - Q_{j+1}^k) + \Delta t \cdot (l \cdot k)_j^k \quad (5.30)$$

## 5.5 Určení okrajových podmínek

Obě okrajové podmínky jsou variací na tlakovou okrajovou podmínku, tedy konstantnímu předepsání tlaku, což odpovídá fyzikální předloze rozlehlé nádrže na obou koncích potrubí. Tento tlak je roven tlaku hydrostatickému a v průběhu výpočtu má konstantní hodnotu. Průtok v těchto okrajových podmínkách je řízen pomocí ventilů na obou koncích. Jedním modelem tak lze simulovat jak totální ráz na spodním konci, tak utržení vodního sloupce na horním konci potrubí.



Obrázek 10 - Uspořádání domény

Na obou koncích výpočetní domény je tedy okrajový uzel tvořen numerickým modelem ventilu. Jedním ze základních parametrů, kterým je ventil nejčastěji popsán, je hodnota průtokového součinitele  $K_v$ . Tento parametr nabývající rozměru objemového průtoku, tedy  $[\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$ , je vztažen na průtok kapaliny o hustotě  $\rho_{\text{ref}} = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  a tlakovém spádu  $\Delta p_{\text{ref}} = 100000 \text{ Pa}$ . Vztah pro průtokový součinitel je tedy definován následovně [10]:

$$K_v = Q \cdot \sqrt{\frac{\Delta p_{\text{ref}}}{\rho_{\text{ref}}} \cdot \frac{\rho}{\Delta p}} \quad (5.31)$$

Po dosazení referenčních hodnot a drobné úpravě je získán výsledný vztah pro průtokový součinitel:

$$K_v = Q \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\Delta p}} \cdot 10 \quad (5.32)$$

Obecně lze hydraulický odpor v potrubním systému definovat pomocí tlakové ztráty na prvku, pomocí obecně známého vztahu:

$$\Delta p = R_{\text{prvku}} \cdot |Q| \cdot Q \quad (5.33)$$

Ze vztahu (5.32) lze rovněž vyjádřit tlakovou ztrátu. Při umocnění celého výrazu je však nutno respektovat znaménko u hodnoty průtoku. Proto je druhá mocnina nahrazena součinem absolutní hodnoty a hodnoty průtoku. Takto ošetřený vztah nabývá podoby:

$$\Delta p = \frac{\rho \cdot 100}{K_v^2} \cdot |Q| \cdot Q \quad (5.34)$$

Z analogie mezi vztahy (5.33) a (5.34) je patrné, že obecně lze odpor ventilu definovat jako:

$$R_{prvku} = \frac{\rho \cdot 100}{K_v^2} \quad (5.35)$$

Za určitých zjednodušujících předpokladů lze tedy říci, že průtokový součinitel je inverzní hodnotou místního odporu. Při maximálních hodnotách  $K_v$  nabývá odpor minimálních hodnot, což odpovídá stavu plně otevřeného ventilu. Naopak při minimálních hodnotách průtokového součinitele nabývá odpor maximálních hodnot, neboť se limitně blíží nekonečnu.

Pro řízení průtoku je vhodné zavést časovou závislost součinitele  $K_v$ . Je tedy zavedena závislost:

$$K_v = K_{v\_max} \cdot z_n \quad (5.36)$$

Kde hodnota  $z_n$  je poměrné otevření ventilu nabývající hodnot od 0 při plném zavření ventilu po 1 při maximálním otevření ventilu. Pomocí poměrného otevření je definován čas, při kterém započne zavírání ventilu a obecně i rychlost zavírání ventilu. Tedy velikost časového úseku, po který se hodnota poměrného otevření pohybuje v intervalu  $\langle 0,1 \rangle$ .

## 5.6 Okrajová podmínka na začátku potrubí

Pro odvození vztahu, který lze použít v uzlu jedna, je nutno použít vztahu (5.28) pro záporný směr šíření informací. Hodnoty v další časové vrstvě jsou počítány ze znalosti hodnot tlaku a průtoku v předchozí časové vrstvě v bodech 1 a 2.

Ze vztahu (5.28) je vyjádřen tlak v poloze 1 v časové vrstvě  $k+1$ :

$$p_1^{k+1} = \frac{1}{a_Q} \cdot [Q_1^{k+1} - Q_1^k + b_Q \cdot |Q_1^k| \cdot Q_1^k - \Delta t \cdot S \cdot g \cdot \sin \alpha] + \dots \quad (5.37)$$

$$\dots + c_p \cdot [-Q_2^k + Q_1^k] + p_2^k + \Delta t \cdot (l \cdot k)_1^k$$

Tlaková ztráta na ventilu je definována vztahem (5.34). Rozdíl tlaků je v tomto případě mezi nulovým uzlem, tedy pevně předepsaným tlakem od vodního sloupce v horní nádrži, a tlakem v uzlu 1. Lze tedy zapsat:

$$\Delta p = p_H^{k+1} - p_1^{k+1} = \frac{\rho \cdot 100}{K_v^2} \cdot |Q_1^{k+1}| \cdot Q_1^{k+1} \quad (5.38)$$

Jak je patrné ze zápisu rovnice (5.38), je tlaková ztráta vztažena na průtok v uzlu 1. Drobnou úpravou tak získáme alternativní vyjádření tlaku v prvním uzlu v další časové hladině jako:

$$p_1^{k+1} = p_H^{k+1} - \frac{\rho \cdot 100}{K_v^2} \cdot |Q_1^{k+1}| \cdot Q_1^{k+1} \quad (5.39)$$

Dosazením vztahu (5.39) do rovnice (5.37) vznikne po drobných úpravách kvadratická rovnice s jedinou neznámou a to průtokem v bodě jedna v nové časové hladině:

$$|Q_1^{k+1}| \cdot Q_1^{k+1} + \frac{K_v^2}{a_Q \cdot \rho \cdot 100} \cdot Q_1^{k+1} + \frac{K_v^2}{\rho \cdot 100} \cdot \left[ -p_H^{k+1} - \frac{Q_1^k}{a_Q} + p_2^k - c_p \cdot Q_2^k + c_p \cdot Q_1^k + \Delta t \cdot (l \cdot k)_1^k + \frac{b_Q}{a_Q} \right. \quad (5.40)$$

$$\left. \cdot |Q_1^k| \cdot Q_1^k - \frac{1}{a_Q} \cdot \Delta t \cdot S \cdot g \cdot \sin \alpha \right] = 0$$

Zavedením následující substituce se celý výraz značně zjednoduší, nechť tedy:

$$A_1 = \pm 1 \quad (5.41)$$

$$B_1 = \frac{K_v^2}{a_Q \cdot \rho \cdot 100} \quad (5.42)$$



$$C_1 = \frac{K_v^2}{\rho \cdot 100} \cdot \left[ -p_H^{k+1} - \frac{Q_1^k}{a_Q} + p_2^k - c_p \cdot Q_2^k + c_p \cdot Q_1^k + \Delta t \cdot (l \cdot k)_1^k + \frac{b_Q}{a_Q} \cdot |Q_1^k| \cdot Q_1^k - \frac{1}{a_Q} \cdot \Delta t \cdot S \cdot g \cdot \sin \alpha \right] \quad (5.43)$$

Aby bylo zachováno znaménko u průtoku, respektive směr proudění, je nutné před dalším postupem kontrolovat hodnotu konstanty  $C_1$ . Nabývá-li kladných hodnot, znamená to, že dochází ke změně směru proudění a je tedy nutné změnit znaménko u konstanty  $A_1$  na záporné.

Kvadratická rovnice (5.40) tedy přechází do zjednodušeného tvaru:

$$A_1 \cdot Q_1^{k+1} \cdot Q_1^{k+1} + B_1 \cdot Q_1^{k+1} + C_1 = 0 \quad (5.44)$$

Nyní lze nalézt řešení této rovnice pomocí diskriminantu ve tvaru:

$$Q_1^{k+1}{}_{1,2} = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4 \cdot A_1 \cdot C_1}}{2 \cdot A_1} \quad (5.45)$$

Tímto je získána hodnota průtoku pro uzel 1, nicméně je nutné určit i hodnotu tlaku v tomto uzlu. Zde je nutné opět použít rovnice (5.37). Díky tomu, že je již známa hodnota všech proměnných, které do tohoto vztahu vstupují, není problém jej vyčíslit pro konkrétní hodnotu.

## 5.7 Okrajová podmínka na konci potrubí

Obdobně jako u odvození vztahů pro počáteční bod, je opět nezbytné použít jednoho z výše odvozených vztahů, tentokrát pro kladný směr šíření informace, tedy rovnice (5.27). Z té lze opět, po několika drobných úpravách, vyjádřit hodnotu tlaku v posledním uzlu v dalším časovém okamžiku:

$$p_N^{k+1} = \frac{1}{a_Q} \cdot [-Q_N^{k+1} + Q_N^k - b_Q \cdot |Q_N^k| \cdot Q_N^k + \Delta t \cdot S \cdot g \cdot \sin \alpha] + \dots \quad (5.46)$$

$$\dots + c_p \cdot [-Q_N^k + Q_{N-1}^k] + p_{N-1}^k + \Delta t \cdot (l \cdot k)_N^k$$

Tlakový spád na ventilu lze opět zapsat pomocí vztahu (5.34). Tentokrát je definován rozdílem tlaků v uzlu  $N$  a v dolní tlakové okrajové podmínce. Ztráty jsou tentokrát vztaženy na průtok v bodě  $N$ :

$$\Delta p = p_N^{k+1} - p_D^{k+1} = \frac{\rho \cdot 100}{K_v^2} \cdot |Q_N^{k+1}| \cdot Q_N^{k+1} \quad (5.47)$$

Vyjádřením tlaku v uzlu  $N$  v nové časové hladině a dosazením do rovnice (5.46) vzniká opět kvadratická rovnice, kde neznámou je opět průtok v bodě  $N$  v čase  $k+1$ :

$$\begin{aligned} & |Q_N^{k+1}| \cdot Q_N^{k+1} + \frac{K_v^2}{a_Q \cdot \rho \cdot 100} \cdot Q_N^{k+1} + \frac{K_v^2}{\rho \cdot 100} \\ & \cdot \left[ p_L^{k+1} - \frac{Q_N^k}{a_Q} - p_{N-1}^k - c_p \cdot Q_{N-1}^k + c_p \cdot Q_N^k - \Delta t \cdot (l \cdot k)_N^k \right. \\ & \left. + \frac{b_Q}{a_Q} \cdot |Q_N^k| \cdot Q_N^k - \frac{1}{a_Q} \cdot \Delta t \cdot S \cdot g \cdot \sin \alpha \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.48)$$

Opět je výhodné zavést několik substitucí v kvadratické rovnici. Nechť tedy:

$$A_N = \pm 1 \quad (5.49)$$

$$B_N = \frac{K_v^2}{a_Q \cdot \rho \cdot 100} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} C_N = \frac{K_v^2}{\rho \cdot 100} \cdot & \left[ p_L^{k+1} - \frac{Q_N^k}{a_Q} - p_{N-1}^k - c_p \cdot Q_{N-1}^k + c_p \cdot Q_N^k - \Delta t \right. \\ & \left. \cdot (l \cdot k)_N^k + \frac{b_Q}{a_Q} \cdot |Q_N^k| \cdot Q_N^k - \frac{1}{a_Q} \cdot \Delta t \cdot S \cdot g \cdot \sin \alpha \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

Jak bylo uvedeno u počáteční okrajové podmínky, je nutné nějakým způsobem respektovat směr proudění. To je opět provedeno kontrolou hodnoty konstanty  $C_N$ . Nabývá-li kladných hodnot, znamená to, že dochází ke změně směru proudění a je tedy nutné změnit znaménko u konstanty  $A_N$  na záporné.

Formálně tak rovnice (5.48) přechází do tvaru:

$$A_N \cdot Q_N^{k+1} \cdot Q_N^{k+1} + B_N \cdot Q_N^{k+1} + C_N = 0 \quad (5.52)$$

Hodnotu průtoku v krajním uzlu v nové časové hladině tak lze opět nalézt pomocí diskriminantu:

$$Q_N^{k+1}_{1,2} = \frac{-B_N \pm \sqrt{B_N^2 - 4 \cdot A_N \cdot C_N}}{2 \cdot A_N} \quad (5.53)$$

Po vyřešení hodnot průtoku je nutné opět zjistit tlak v uzlu  $N$  v časové hladině  $k+1$ . Ten opět získáme dosazením do rovnice (5.46), kde již v tomto okamžiku na pravé straně nevystupují žádné neznámé.

## 5.8 Ošetření pravé strany rovnice kontinuity

Odvození v následující kapitole vychází z [1] a [10]. Pro použití kterékoli numerické metody je třeba upravit člen / vystupující na pravé straně rovnice kontinuity (2.30)(2.33), který představuje vliv paměťové funkce:

$$l = -\frac{2 \cdot R}{\Delta \cdot b} \cdot \left[ \int_{\Delta t}^t \frac{dp(t-\tau)}{d\tau} \cdot e^{-\frac{E}{b}\tau} \cdot d\tau + p(0) \cdot e^{-\frac{E}{b}t} \right] \quad (5.54)$$

Pro numerické řešení je nutno nahradit integraci pomocí jednoduchých matematických operací. Integrál je tedy nahrazen sumou diskrétních veličin. Za předpokladů uvedených v [10] je pak možné zapsat vztah následovně:

$$l_j^k = -\frac{2 \cdot R}{\Delta \cdot b} \cdot \left( \sum_{i=0}^{k'} \frac{p_j^{k-i} - p_j^{k-i-1}}{\Delta t} \cdot \int_{(i+1) \cdot \Delta t}^{(i+2) \cdot \Delta t} e^{-\frac{E}{b}\tau} d\tau + p_j^0 \cdot e^{-\frac{E}{b}k} \right) \quad (5.55)$$

Po integraci a několika úpravách přejde vztah do podoby, která je použitelná pro numerické řešení:

$$l_j^k = -\frac{2 \cdot R}{\Delta \cdot b} \cdot \left\{ \frac{b}{E} \cdot \left[ \sum_{i=0}^{k'} \left( \frac{p_j^{k-i} - p_j^{k-i-1}}{\Delta t} \right) \cdot \left( e^{-\frac{E}{b}(i+1) \cdot \Delta t} - e^{-\frac{E}{b}(i+2) \cdot \Delta t} \right) \right] + p_j^0 \right\} \cdot e^{-\frac{E}{b}k} \quad (5.56)$$

V sumě uvedený index  $k'$  značí počet všech časových kroků od počátku výpočtu až do řešeného uzlu. Je zřejmé, že provádět sumu skrze celou časovou historii je nevýhodné. Tento problém je řešen v [10], kde autor představuje vztah, který určuje počet minulých časových kroků, které je nutno do sumace zahrnout, aby byla dodržena určitá přesnost vlivu konvoluce. Jak se ukazuje, na hodnotu konvolučního členu má vliv hodnota tlaků pouze v několika stovkách posledních kroků.

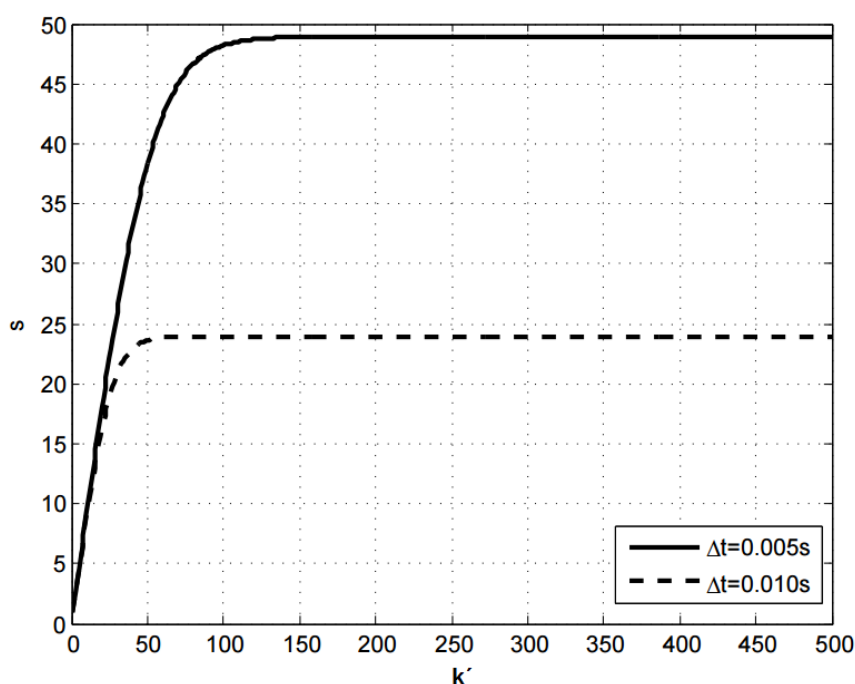
Je tedy zaveden vztah mezi velikostí sumy za celou časovou historii a sumou, která je ovšem počítána jen pro  $s'$  posledních kroků. Funkce definovaná jako  $f_p$  tedy vypadá následovně:

$$f_p = \frac{\sum_{i=0}^{s'} \left[ e^{-\frac{E}{b}(i+1) \cdot \Delta t} - e^{-\frac{E}{b}(i+2) \cdot \Delta t} \right]}{\sum_{i=0}^{k'} \left[ e^{-\frac{E}{b}(i+1) \cdot \Delta t} - e^{-\frac{E}{b}(i+2) \cdot \Delta t} \right]} \quad (5.57)$$

V ideálním případě je vhodné, aby funkce  $f_p$  nabývala hodnoty přibližně rovno jedné. Po provedení sumace a několika dalších kroků je získán konečný vztah pro hodnotu  $s'$ :

$$s' = -\frac{b}{E \cdot \Delta t} \cdot \ln \left( 1 - f_p + f_p \cdot e^{-\frac{E}{b} \cdot (k'+1) \cdot \Delta t} \right) - 1 \quad (5.58)$$

Pro vyřešení tohoto vztahu je nutné zadat hodnotu parametru  $f_p$ . Pro hodnotu rovnu jedné je počítána konvoluce z celé časové historie, tedy se 100% přesností. Snížením na hodnotu kupříkladu 0,95 je tedy rovnost v rovnici (2.30) splněna na 95 %. Jak uvádí autor v [10], je možné pro konkrétní hodnoty  $E = 6 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$  a  $b = 5 \cdot 10^9 \text{ Pa} \cdot \text{s}$  s nastavením  $f_p = 0,95$  získat závislosti proměnné  $s$  na počtu kroků.



Obrázek 11 - Počet nezbytných kroků v konvoluční sumě [10]

Je patrné, že pro určitý časový krok již není nutné počítat z celé historie zatěžování, aby bylo docíleno zadané přesnosti. Konkrétně pro časový krok  $\Delta t = 0,01 \text{ s}$  dostačuje 24 posledních časových kroků a pro poloviční krok posledních 48 kroků.

## 5.9 Určení časového kroku

Při použití reologického modelu materiálu s uvažováním tuhosti a tlumení je nutno určit časový krok metody ze vztahu (5.2) pro velikost časového kroku pro zobecněnou metodu charakteristik. Rychlost zvuku v systému je definována pomocí rovnice (3.1), která je obecně počítána jako funkce tuhosti systému a hustoty média. Tuhost systému je se zahrnutím vlivu potrubí, které je nahrazeno reologickým modelem, je definována v rovnici (2.30). Dosazením je tak získán vztah pro velikost časového kroku.

$$\Delta t = C \cdot \Delta x \cdot \sqrt{\frac{1}{v_w^2} + \frac{2 \cdot R \cdot \rho_w}{E \cdot \Delta} \cdot \left(1 - e^{-\frac{E}{b} \Delta t}\right)} \quad (5.59)$$

Je zřejmé, že se jedná o vztah implicitní a hodnotu časového kroku je vždy nutné získat pomocí iteračního přístupu.

## 6 Vlastnosti numerického schématu

Pro kvalitativní hodnocení numerického schématu a jeho porovnání s jinými numerickými metodami byla zvolena jednoduchá úloha. Parametry této úlohy jsou pro možnost následného porovnání převzaty z práce [11].

Jedná se o jednoduchý systém přímé trubice bez vlivu gravitace, tlumení materiálu a s konstantní rychlostí zvuku. Oproti výše odvozenému modelu nejsou na koncích potrubí uvažovány ventily. Průtok je řízen pomocí přímé úpravy hodnoty průtoku v posledním uzlu v závislosti na aktuálním čase. Okrajová podmínka na začátku potrubí je získána ze vztahu (5.28) pro záporné šíření informací v systému. Obdobně okrajová podmínka na konci potrubí vychází ze vztahu pro kladný směr šíření informace (5.27).

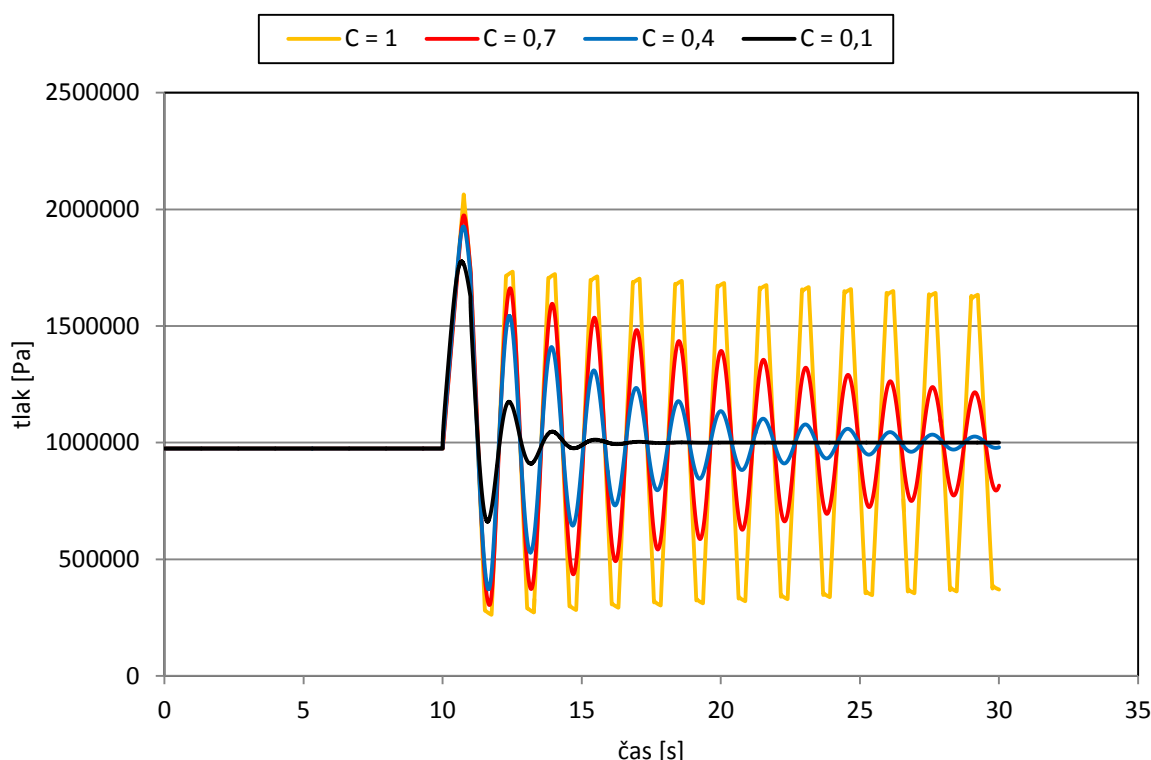
Délka potrubí	$L = 380 \text{ m}$
Doba zavírání	$T_{\text{zav}} = 1 \text{ s}$
Hustota kapaliny	$\rho_w = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Rychlost zvuku v médiu	$v_w = 1000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Součinitel délkových ztrát	$\lambda = 0,02$
Světlost potrubí	$D = 0,3 \text{ m}$
Tlak v posledním uzlu	$p_{20} = 0,5 \text{ MPa}$
Tlak v prvním uzlu	$p_1 = 1 \text{ MPa}$
Ustálený průtok	$Q(t = 0) = 0,1 \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$
Velikost prostorového kroku	$\Delta x = 20 \text{ m}$

## 6.1 Vliv Courantova čísla

Zobecněná metoda charakteristik, jak vyplývá z rovnice (5.2), nemá pevně předepsaný časový krok. Je tedy vhodné porovnat vliv velikosti Courantova čísla na věrohodnost řešení.

Na následujícím grafu je vykreslen průběh tlaků v závislosti na čase pro hodnoty Courantových čísel  $C = 1$ ,  $C = 0,7$ ,  $C = 0,4$ ,  $C = 0,1$ . Je zřejmé, že s nižší hodnotou Courantova čísla klesají hodnoty tlakových špiček. Při nejmenší hodnotě Courantova čísla dochází k úplnému ztlumení již po 4 periodách.

Chování modelu je ovlivněno již z definice numerického schématu UPWIND, kdy se při rozvoji v časové oblasti pracuje s Taylorovým rozvojem prvního stupně. Se zmenšujícím se časovým krokem tak dochází k značnému ztlumení oproti časovému kroku s Courantovým číslem 1, který by měl odpovídat analytickému řešení dle obecné metody charakteristik.

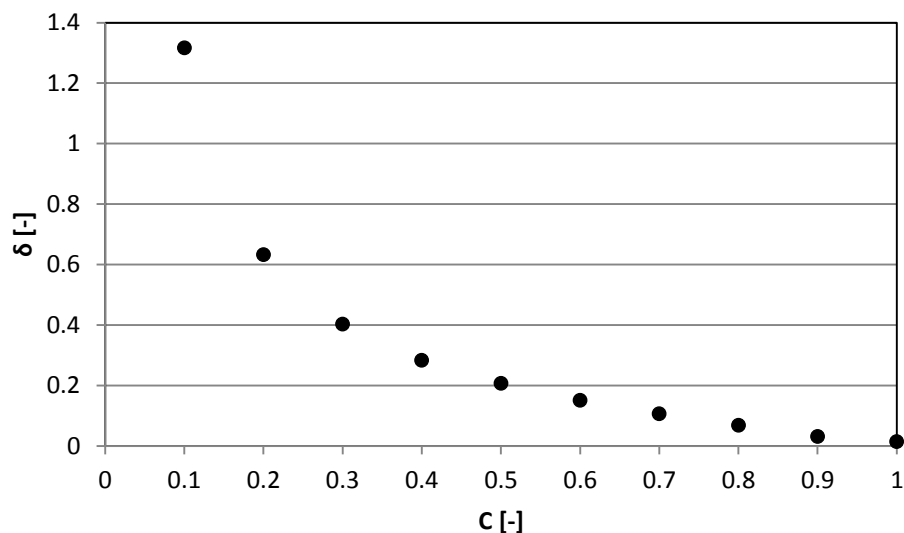


Graf 1 Vliv Courantova čísla

Pro kvalitativní srovnání vlivu Courantova čísla na řešení je použito bezrozměrného parametru, tzv. logaritmického dekrementu útlumu. Ten je definován jako přirozený logaritmus podílu velikosti dvou po sobě následujících amplitud, které jsou vzdálené právě o jednu periodu.

$$\delta = \ln \frac{p_t - p_{stř}}{p_{t+T} - p_{stř}} \quad (6.1)$$



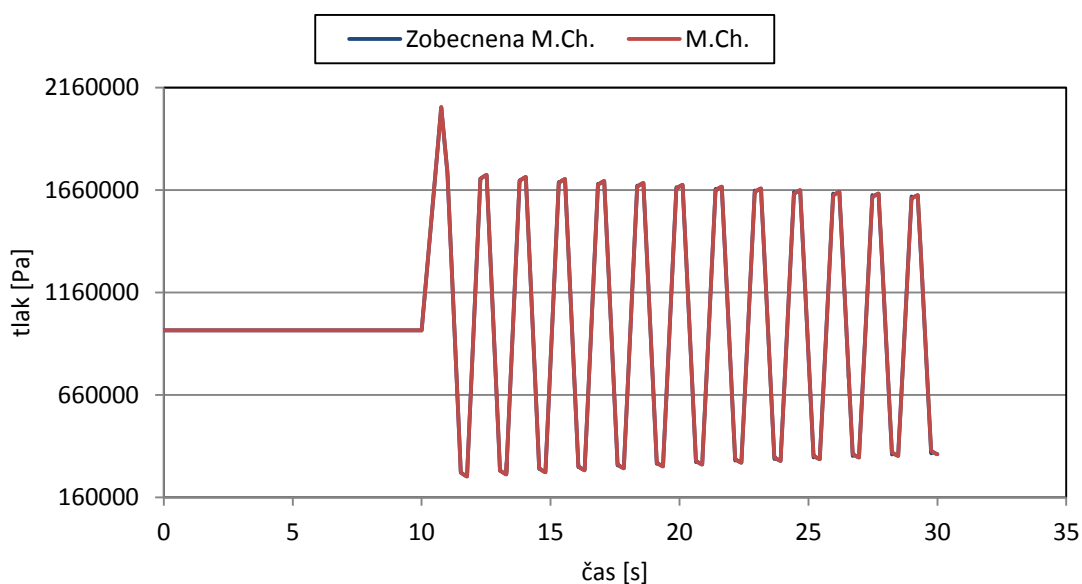


Graf 2 Závislost logaritmického dekrementu útlumu na Courantově čísle

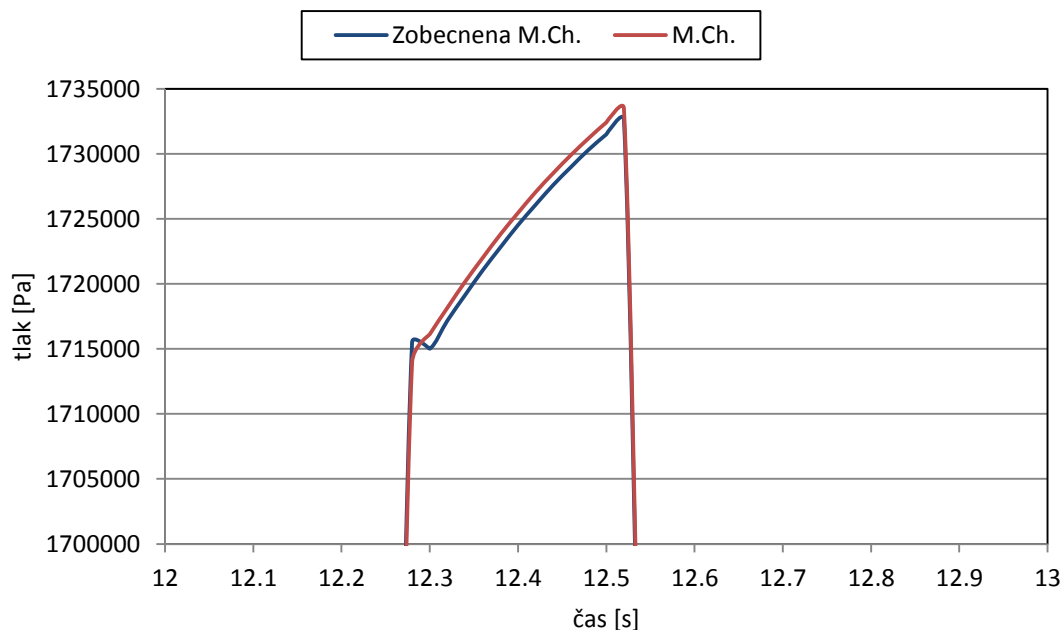
Hodnoty logaritmického dekrementu byly určeny z hodnot druhé a třetí kladné tlakové špičky. Pro  $C = 0,1$  již dochází k takovému zatlumení, že není možné věrohodně odečíst velikost třetí tlakové špičky a tím dochází ke zkreslení vypočtené hodnoty logaritmického dekrementu útlumu. Pro ještě menší Courantova čísla pak dochází k ustálení přechodového děje po druhé kladné tlakové špičce a třetí kladná tlaková špička již úplně zanikne.

## 6.2 Porovnání s obecnou metodou charakteristik

Podrobné odvození analytického řešení pomocí obecné metody charakteristik je provedeno v práci [11], odkud jsou převzata také data z numerického modelu. Okrajové podmínky, geometrie a všechny proměnné vstupující do výpočtu jsou totožné jak pro metodu charakteristik, tak pro zobecněnou. Při výpočtu pomocí zobecněné metody charakteristik je použito Courantovo číslo  $C = 1$ , což má dle definice (5.2) odpovídat shodnému časovému kroku, který je pro obecnou metodu charakteristik pevně definován geometrií a vlastnostmi výpočetní domény.

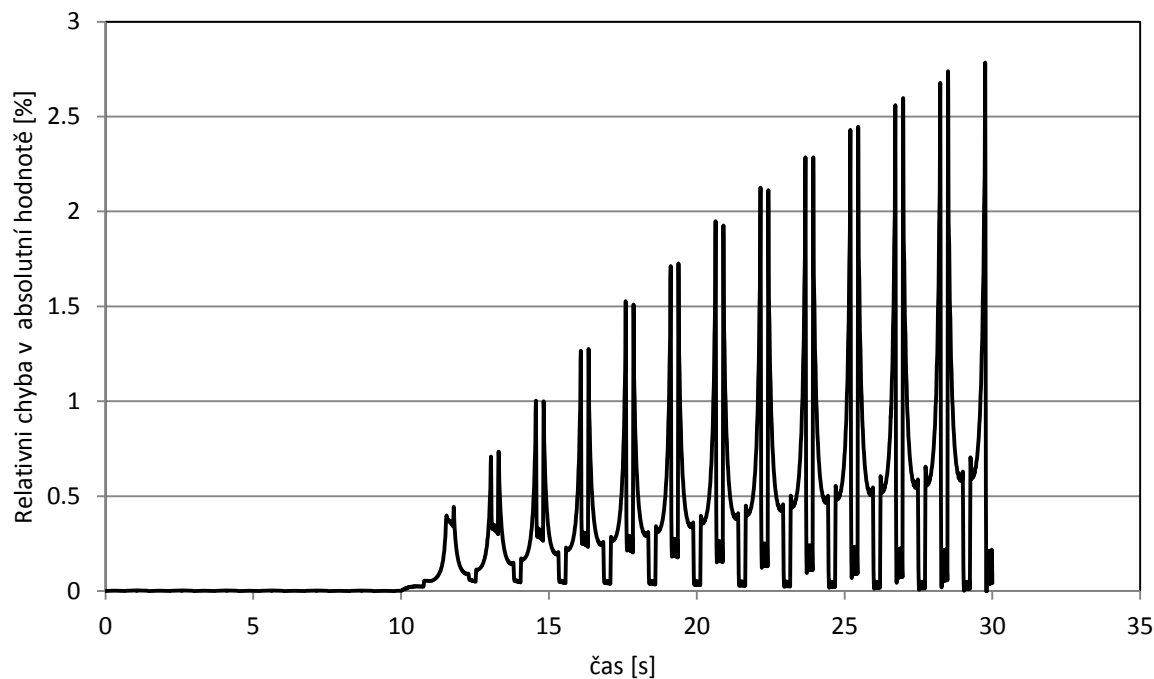


Graf 3 Srovnání s obecnou metodou charakteristik



Graf 4 Srovnání s obecnou metodou charakteristik – detail

V pohledu na celou časovou oblast se jeví výsledky obou metod jako totožné. Při bližším pohledu na druhou tlakovou špičku je zřejmý rozdíl mezi oběma metodami. Zobecněná metoda charakteristik vytváří před vrcholem tlakové špičky nepatrný nárůst oproti obecné metodě charakteristik. Dále je však hodnota tlaku oproti metodě charakteristik nižší. Tento jev je dobře patrný při vykreslení relativní chyby obou metod.



Graf 5 Absolutní hodnota relativní chyby

Pro srovnání byl opět vypočten logaritmický dekrement útlumu pro obě metody. Vyhodnocení je opět z druhé a třetí kladné tlakové špičky:

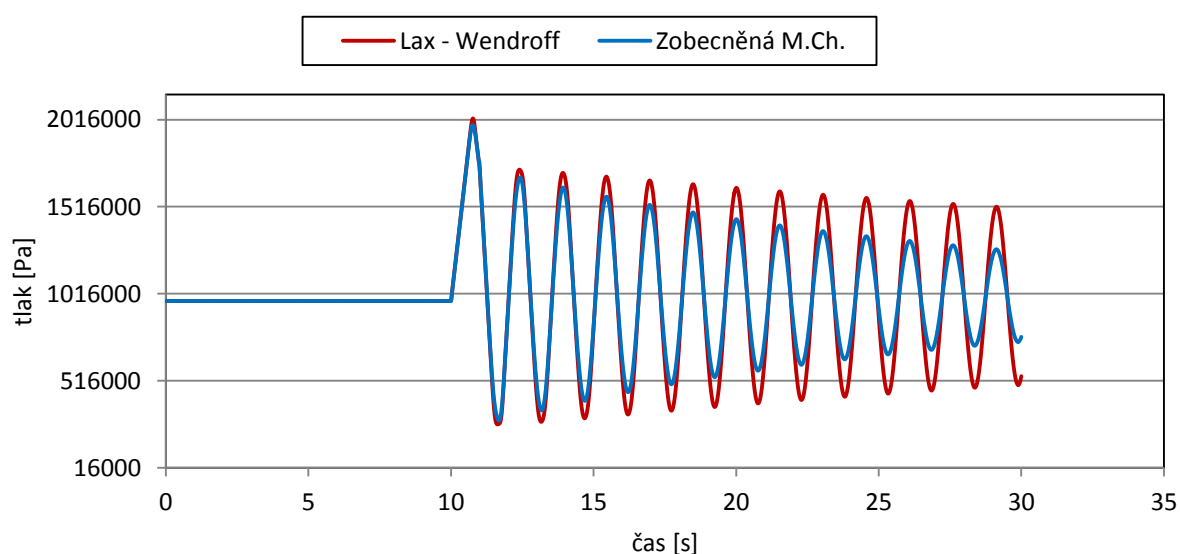
	$\delta$ [-]
Obecná metoda charakteristik	<b>0.0141418</b>
Zobecněná metoda charakteristik	<b>0.0140592</b>

Z vyhodnocených hodnot logaritmického dekrementu je tedy zřejmé, že relativní chyba od obecné metody charakteristik, která s postupem času roste, je důsledkem menšího tlumení zobecněné metody charakteristik.

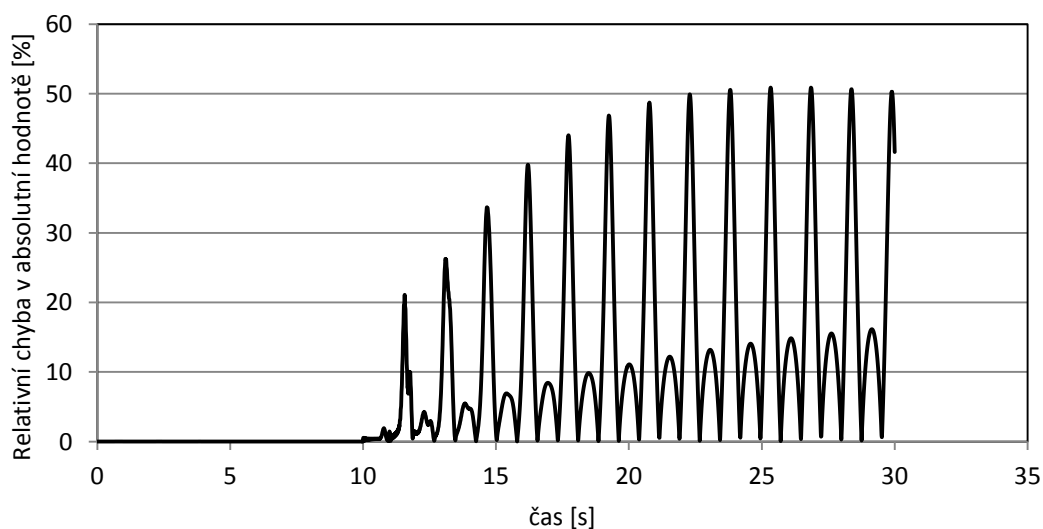
### 6.3 Porovnání s numerickou metodou Lax-Wendroff

Data napočtená pomocí schématu numerické metody Lax-Wendroff jsou převzata z práce [11], kde je také podrobný popis a odvození schématu této metody. Mezi numerickými metodami, kterými je vhodné řešit soustavu parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu, patří schéma Lax-Wendroff mezi nejdůležitější. Protože využívá Taylorova rozvoje druhého stupně, je označována jako metoda s vyšším řádem přesnosti.

Pro řešení schématem Lax-Wendroff je nutné dodržet podmínku velikosti časového kroku (5.2). V tomto konkrétním případě bylo Courantovo číslo na hodnotě  $C = 0,75$ . Tato hodnota byla použita i pro řešení pomocí zobecněné metody charakteristik.

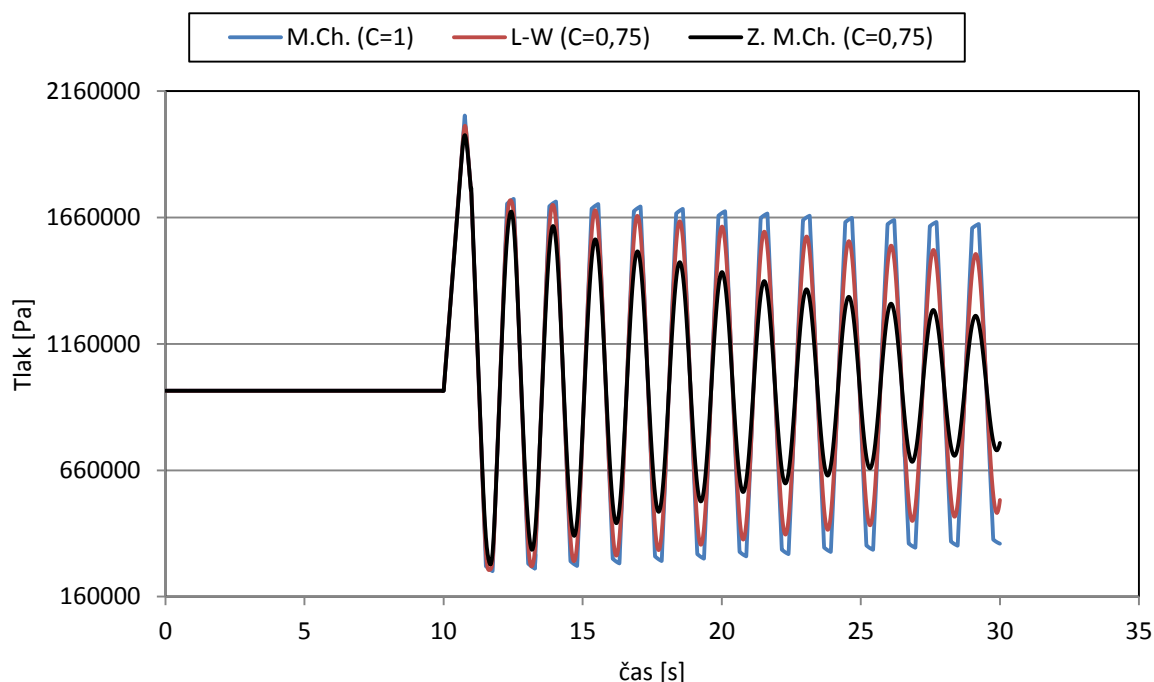


Graf 6 Srovnání s metodou Lax-Wendroff



Graf 8 – Absolutní hodnota relativní chyby

Pro srovnání jsou v následujícím grafu zaneseny i hodnoty spočtené pomocí obecné metody charakteristik, tedy s  $C = 1$ .



Graf 9 - Srovnání metod

Je jasné vidět, že metoda Lax-Wendroff zkresluje výsledky získané pomocí obecné metody charakteristik vlivem volby Courantova čísla, ale zatlumení je výrazně nižší než u hodnot získaných zobecněnou metodou charakteristik se shodným Courantovým číslem.

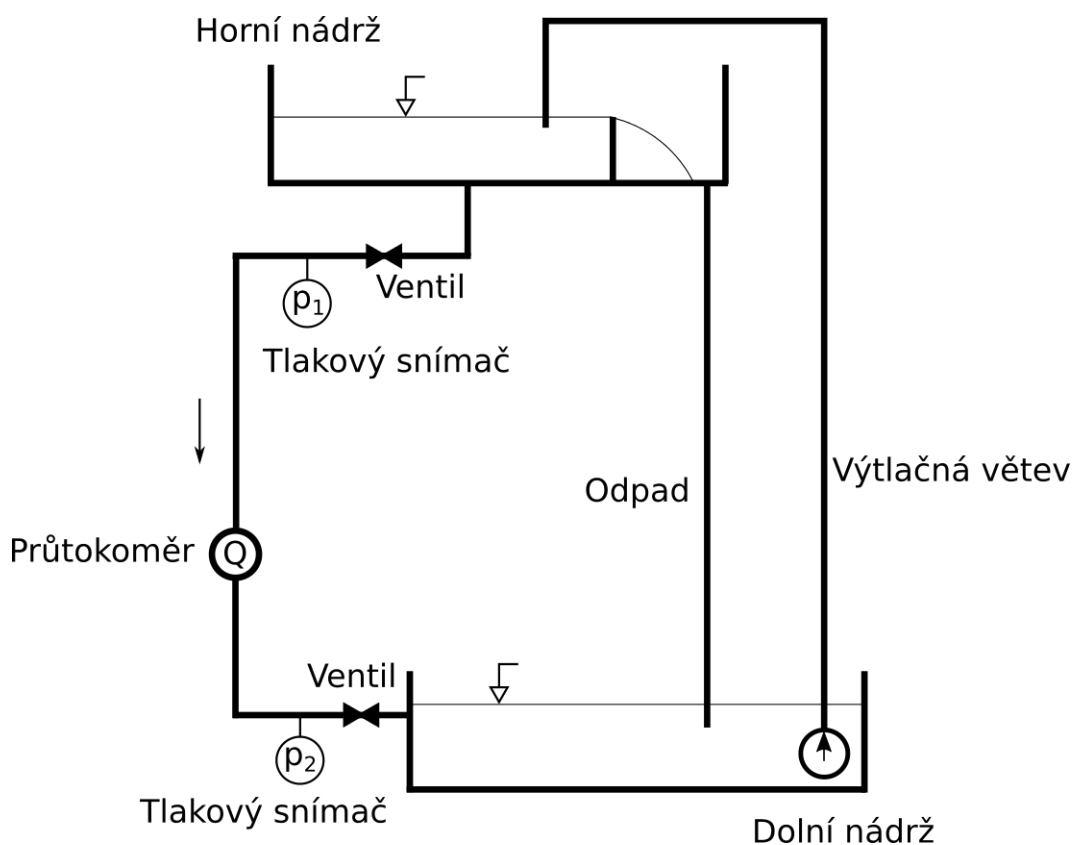
Pro srovnání tlumení metody Lax-Wendroff a zobecněné metody charakteristik byl opět spočítán logaritmický dekrement útlumu mezi druhou a třetí kladnou tlakovou špičkou.

	$\delta [-]$
Lax-Wendroff ( $C=0,75$ )	<b>0.0256769</b>
Zobecněná metoda charakteristik ( $C=0,75$ )	<b>0.0872124</b>

## 7 Experimentální ověření

### 7.1 Popis zkušební tratě

Pro ověření věrohodnosti vypočtených parametrů pomocí numerického modelu bylo nutné provést ověření na experimentální trati Odboru fluidního inženýrství Viktora Kaplana. Trať sestává z horní a dolní nádrže, které jsou vzájemně propojeny polypropylenovou trubicou konstantní světlosti  $D = 0,029\text{ m}$  o délce  $L = 58,26\text{ m}$ . Ze spodní sběrné nádrže je voda dopravována čerpadlem do horní nádrže, která je opatřena přepadem, čímž je zajištěna konstantní výška hladiny v horní nádrži. Napojení trubice do horní nádrže je realizováno skrze její dno. Pod horní nádrží je instalován horní, pneumaticky ovládaný, ventil. Za horním ventilem, po směru toku vody, je umístěn tlakový snímač. Na opačném konci potrubí, před spodní nádrží, je po proudu umístěn nejprve indukční průtokoměr, další tlakový snímač a opět pneumaticky řízený ventil.



Obrázek 12 Schéma měřicí trati

Zaznamenané veličiny jsou skrze měřicí kartu převedeny do počítače, kde jsou dále zpracovány pomocí softwaru *LabView*.

Kompletní parametry trati, které byly použity jako vstupní hodnoty do numerického modelu, jsou uvedeny v následující tabulce. Maximální hodnota  $Kv_{max}$  ventilů je převzata z dat výrobce, stejně jako rychlost zavírání ventilu [12].

### Parametry systému

Délka potrubí	$L = 58.26 \text{ m}$
Doba zavírání ventilu	$T_{\text{zav}} = 0.2 \text{ s}$
Maximální průtokový součinitel	$Kv_{\text{max}} = 30 \text{ m}^3 \cdot \text{hod}^{-1}$
Světlost potrubí	$D = 0.029 \text{ m}$
Tloušťka stěny potrubí	$\Delta = 0.00596 \text{ m}$

## 7.2 Postup měření

Před samotným měřením bylo nutné nechat v okruhu nějaký čas kolovat vodu bez jakéhokoli zásahu zvenčí z důvodu ustálení obsahu vzduchu rozpuštěného ve vodě. V tomto stavu čerpadlo běží, oba ventily jsou otevřeny a voda tak samospádem proudí potrubím do dolní nádrže. Po přibližně hodině, kdy by se měla, dle zkušenosti obsluhy trati, ustálit koncentrace rozpuštěného vzduchu, bylo možné přistoupit k samotnému měření.

Měřeny byly dva přechodné stavy – uzavírání spodního ventilu při ustáleném průtoku a následně uzavírání horního ventilu při ustáleném průtoku. Na připojeném PC byl spuštěn zápis dat, který po dobu 20 vteřin zapisoval hodnoty průtoku a tlaku v obou tlakoměrech se vzorkovací frekvencí 1000 Hz. Po spuštění zápisu dat bylo nutné pomocí ovládacího pultu přepnout spodní ventil pomocí pneumatického řízení do polohy zavřeno.

Po každém měření bylo nutné provést odvzdušnění trati. V tomto případě se pomocí ventilu přestavila výtlačná větev čerpadla do trubice, v níž právě proběhl vodní ráz – voda tedy proudila proti naznačenému smyslu, který ukazuje Obrázek 12. V horní části trubice byla umístěna průhledná část, skrze kterou bylo možné vizuálně kontrolovat případné vzduchové bubliny procházející systémem. Po přibližně 5-ti minutách, kdy v kontrolním průzoru nebyly vidět žádné vzduchové bubliny, byl opět přestaven výtlak čerpadla do původní polohy a otevřen spodní ventil. Po ustálení průtoku bylo možné přikročit k dalšímu měření.

Celkem bylo provedeno 5 měření pro zavírání horního ventilu a 5 měření pro zavírání ventilu dolního. Po dokončení měření byl celý okruh vypuštěn a z tlakoměrů byla odečtena hodnota atmosférického tlaku. Mezi samotným měřením bylo provedeno i odečtení teploty vody.



### 7.3 Použitá měřicí technika

Zařízení	Označení ve schématu	Parametry	
Snímač absolutního tlaku s keramickou membránou	p1	Výrobce Model Rozsah Přesnost Výrobní číslo	<i>JSP Industiral Controls D2411 A210 GD4 P05 CR1 KN1 0 ÷ 1 MPa 0,5 % z rozsahu 1594573</i>
Snímač absolutního tlaku s keramickou membránou	p2	Výrobce Model Rozsah Přesnost Výrobní číslo	<i>JSP Industrial Controls D2411 A210 GD4 P05 CR1 KN1 0 ÷ 1 MPa 0,5 % z rozsahu 1594579</i>
Magneticko-indukční průtokoměr	Q	Výrobce Model Rozsah Přesnost  Výrobní číslo	<i>ELA, spol s r.o. MQI 99-CN 0 – 10 m<sup>3</sup>·hod<sup>-1</sup> 0,3 % z měřené hodnoty v rozsahu 10 ÷ 100 % Q<sub>max</sub> 11 876</i>

### 7.4 Parametry získané z laboratorního měření

Pro srovnání s matematickým modelem byly vybrány dvě sady měření – jedna pro zavírání spodního a druhá pro zavírání horního ventilu. Z naměřených hodnot byla také vyhodnocena výška vodního sloupce v horní nádrži, celkový spád trati, koeficient délkových ztrát a hodnota hmotnostního zlomku vzduchu.

Pro vyhodnocení výšky vodního sloupce v horní nádrži, nad horním pneumatickým ventilem, byla použita hodnota tlaku z tlakového snímače  $p_1$  při zavřeném spodním ventilu po ustálení tlakových pulsací. Z naměřeného atmosférického tlaku pak byla spočtena výška vody v nádrži.

Při zavřeném spodním ventilu, po ustálení vodního rázu, byl pomocí tlakových diferencí spodního a horního ventilu určen celkový spád trati.

Pro určení délkových ztrát v potrubním systému byla odečtena tlaková diference mezi oběma tlakoměry při ustáleném průtoku o známé hodnotě. Protože mezi oběma tlakoměry, jak je patrné na schématu trati, nebyl zařazen žádný jiný prvek či armatura, lze při znalosti spádu a délky trati určit koeficient délkových ztrát  $\lambda$ .

Při určování hmotnostního zlomku vzduchu byla odečtena časová souřadnice dvou po sobě následujících tlakových špiček v oblasti dokmitávání tlakových pulsací, kde se hodnota tlakové amplitudy pohybuje maximálně kolem  $20000 \text{ Pa}$ . Díky znalosti délky periody kmitu lze určit přibližnou střední hodnotu rychlosti v systému dle vztahu:

$$v_{stř} = \frac{4 \cdot L}{T} \quad (7.1)$$

Tato hodnota zahrnuje jak vliv média, tak potrubního systému. V dalším kroku je tedy nutné iterativním způsobem zjistit hodnotu rychlosti zvuku v systému sestávajícího z kapaliny s neznámým obsahem vzduchu a pružného potrubí. Rychlost v systému potrubí-voda (bez obsahu vzduchu) lze zjistit ze vztahu pro tuhost systému (2.29) a rychlost zvuku (3.1). Ve vztahu pro určení tuhosti systému se vyskytují materiálové konstanty a velikost časového kroku. Jejich hodnotu bylo možné v tomto kroku zjistit iterativním postupem při srovnání experimentálních výsledků s výsledky matematického modelu vodního rázu. Takto získaná hodnota rychlosti zvuku poté vstoupila do výpočtu tuhosti směsi voda-plyn dle vztahu (3.9). Do tohoto vztahu vstupuje tlak, který je získán ze střední hodnoty tlakové periody popsané výše při určování střední rychlosti zvuku v systému. Jedinou neznámou, která do tohoto vztahu vstupuje, je tedy hmotnostní zlomek vzduchu, který byl v prvním kroku odhadnut na hodnotu  $M_{vz} = 0,00001$ . Ze vztahu pro hustotu směsi (3.5) a vztahu (3.1) lze poté určit rychlost zvuku v teoretickém systému pružného potrubí a vody s rozpuštěným vzduchem. Tato hodnota by měla odpovídat rychlosti získané ze vztahu (7.1). Z toho důvodu byla pomocí nástroje hledání řešení v programu MS Excel hledána taková hodnota hmotnostního zlomku vzduchu, při které byl kvadrát rozdílů těchto rychlostí co nejmenší. Jak bylo řečeno výše, celý postup je iterativní a pro získání vhodné kombinace proměnných, které do výpočtu vstupují, je bylo nutné několikrát opakovat. Na základě výše popsaného postupu tak byly určeny zbývající parametry trati, které nejsou přímo měřitelné, ale jsou nezbytné pro výpočet pomocí matematického modelu:

#### Parametry měření

atmosférický tlak	$p_a = 95815 \text{ Pa}$
hustota vody	$\rho_w = 999.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
koeficient délkových ztrát	$\lambda = 0.03883$
rychlost zvuku v čisté kapalině	$v_w = 1450 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
spád trati	$H = 2.405 \text{ m}$
teplota vody	$T_w = 16 \text{ }^\circ\text{C}$
ustálený průtok	$Q_0 = 0.0006148 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$
výška hladiny v horní nádrži	$h_h = 0.6741 \text{ m}$

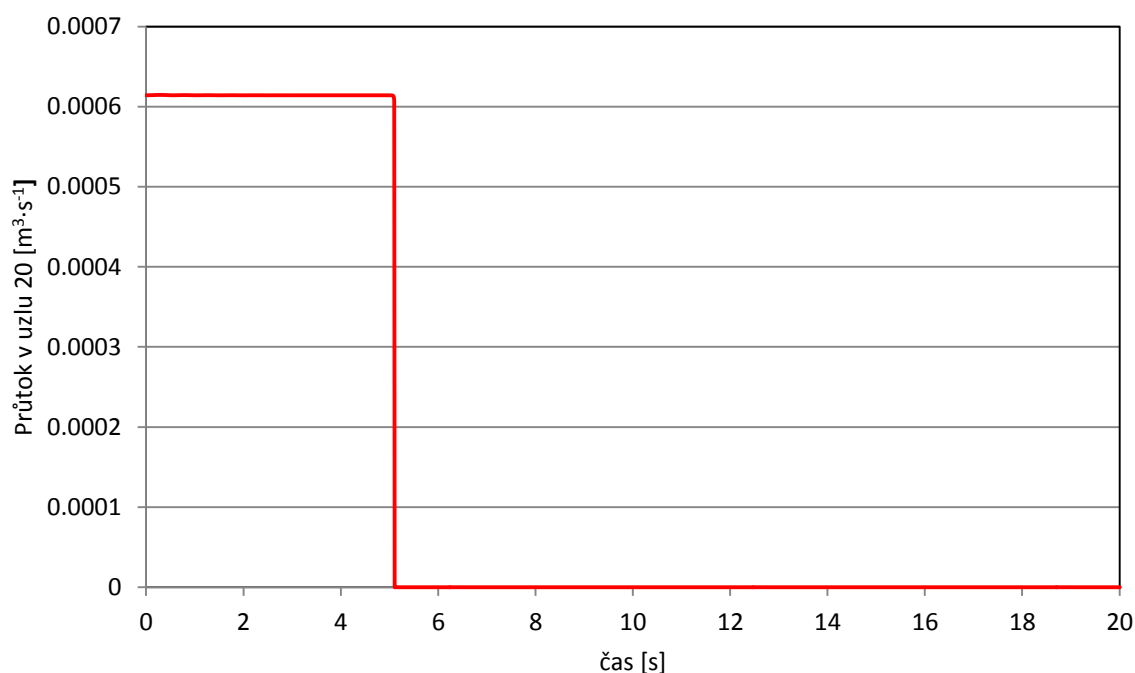
## 7.5 Zavírání spodního ventilu

Pro výpočet tlakových pulsací v systému při zavírání spodního ventilu bylo iteračním způsobem dosaženo nejlepší shody s experimentálně získanými daty při následující konfiguraci.

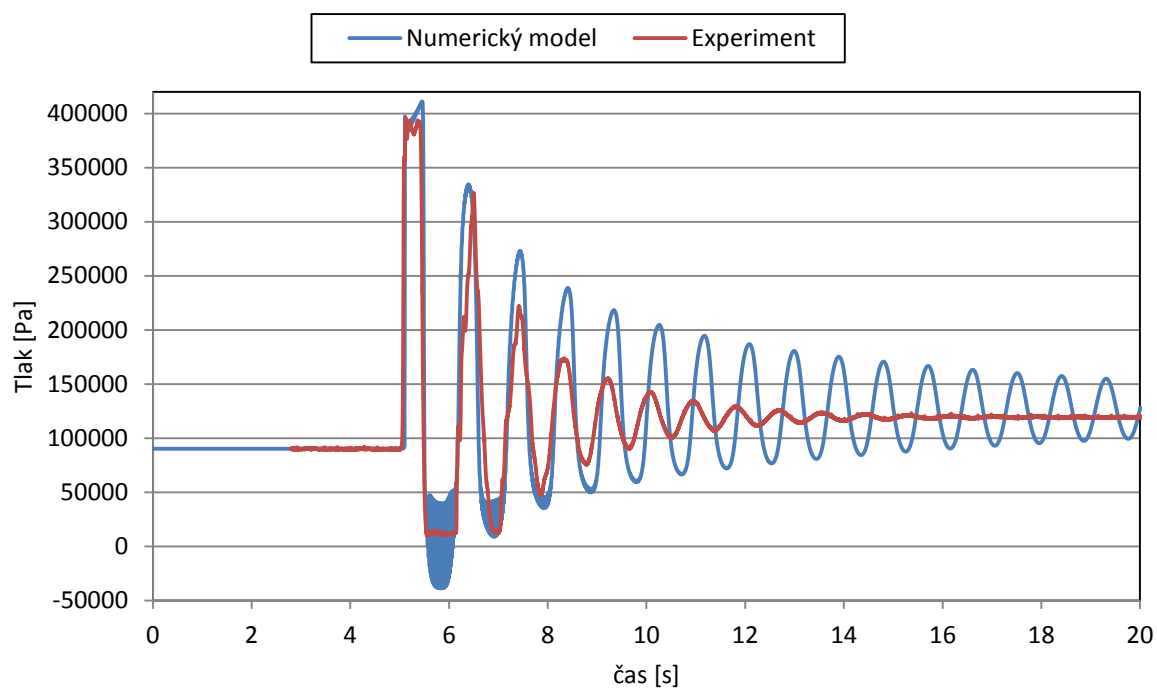
Pro Courantovo číslo rovno jedné se výpočet stával nestabilní. Proto byla volena nejbližší nižší hodnota, při které výpočet fungoval, a to 0,99.

### Parametry numerického modelu - zavírání dolního ventilu

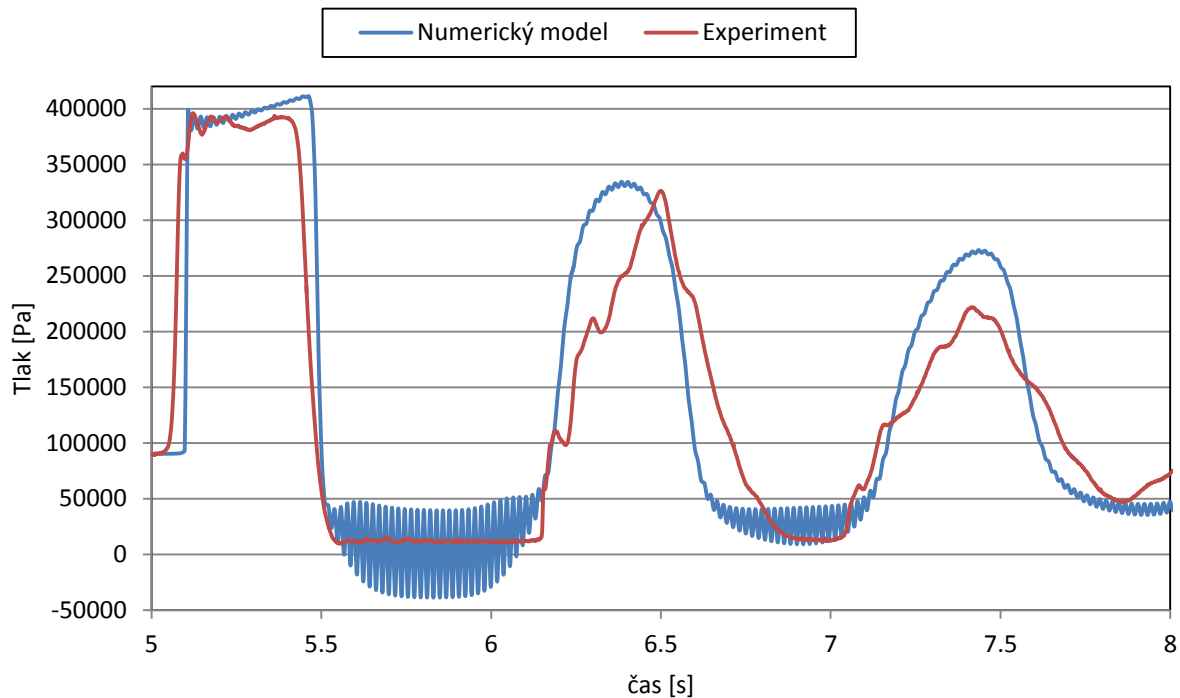
Youngův modul pružnosti	$E = 0.53 \text{ GPa}$
Tlumení v materiálu trubice	$b = 0.5 \text{ MPa}\cdot\text{s}$
Courantovo číslo	$C = 0.99$
Počet uzlů	$N_x = 20$
Prostorový krok	$\Delta x = 3.0663 \text{ m}$
Časový krok	$\Delta t = 0.0094 \text{ s}$
Hmotností zlomek vzduchu	$M_{vz} = 1.25 \cdot 10^{-6}$



Graf 10 Časová závislost průtoku v posledním uzlu



Graf 11 Průběh tlaku při zavírání dolního ventilu



Graf 12 Průběh tlaku při zavírání dolního ventilu - detail

Z průběhu tlakových pulsací v čase je patrné, že numerický model dobře postihuje chování v prvních dvou tlakových špičkách. V dalším čase pak dochází k menšímu zatlumení tlakových pulsací než u experimentu. Tato hodnota by měla být nejlépe ovlivnitelná velikostí tlumení v materiálu, nicméně při uvažování kapaliny tvořené směsí voda-vzduch dochází se zvyšováním tlumení v modelu materiálu ke značné nestabilitě výpočtu, kdy hodnoty tlaku i průtoku rostou k nekonečnu. Oproti dříve vypracovaným studiím, kdy bylo použito schéma Lax-Wendroff a v potrubí byla uvažována pouze voda, je tedy výše uvedená hodnota tlumení přibližně o 4 řády nižší [1].

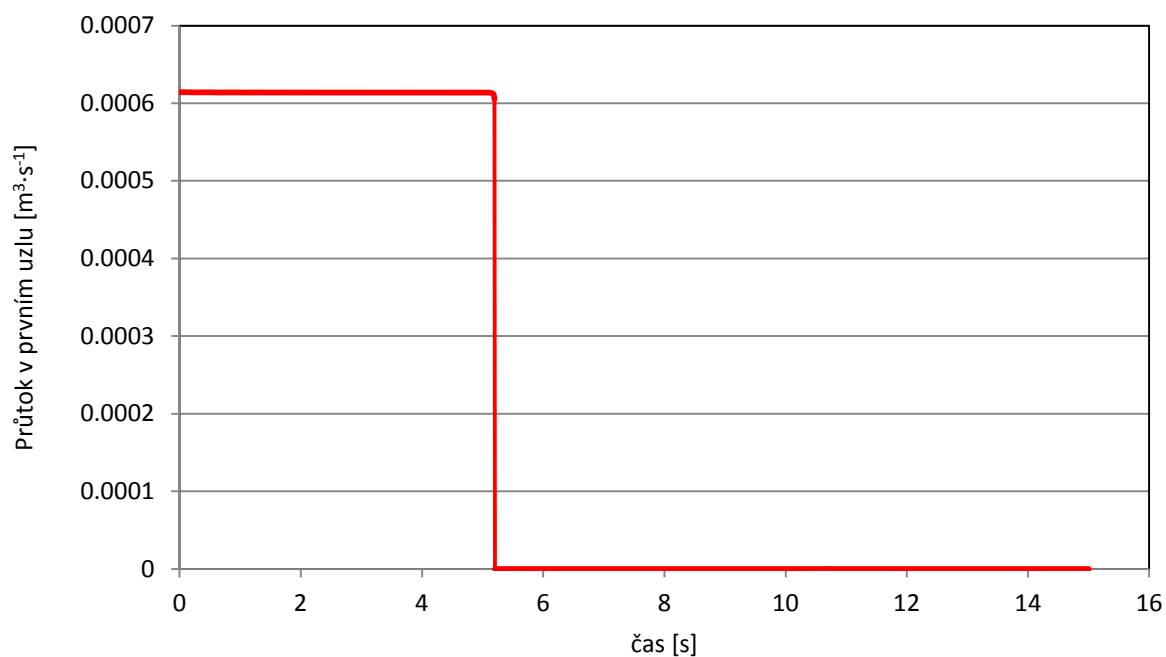
Dalším zajímavým jevem, který ve zpracovaném numerickém modelu nastává, je rozkmitání tlakových hodnot v oblasti nízkých tlaků. Střední hodnota těchto kmitů se drží v kladných tlacích, ale některé peaky sahají do oblasti záporných tlaků. U modelů postavených na schématu typu Lax-Wendroff dochází při překročení do záporného tlaku k okamžitému zatlumení všech dalších kmitů a výsledek tedy postrádá smyslu [10]. Řešené numerické schéma však tímto neduhem netrpí a při malých záporných hodnotách tlaku k zatlumení dalších tlakových špiček nedochází. Problém je s věrohodností řešení, protože pro záporné hodnoty tlaku vychází nefyzikální rychlost zvuku v kapalině, respektive ve směsi voda-vzduch.

## 7.6 Zavírání horního ventilu

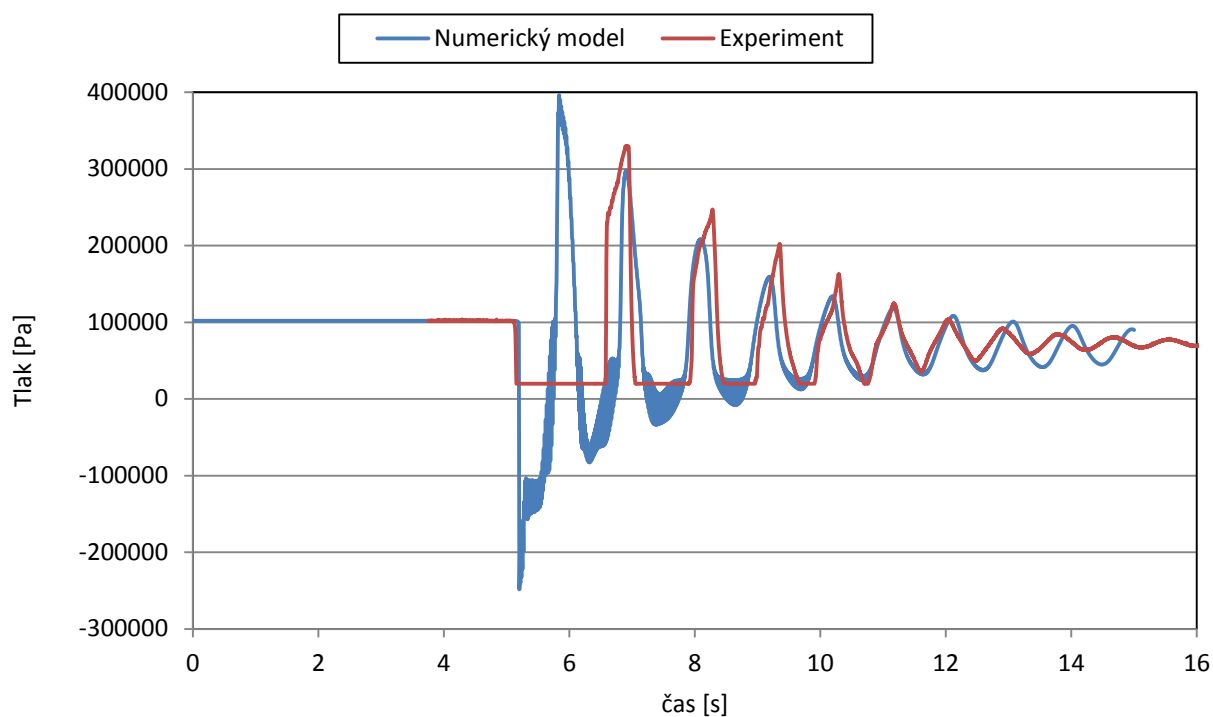
Pro zavírání horního ventilu bylo opět použito výše popsaného postupu pro určení parametrů modelu materiálu a obsahu vzduchu ve směsi s vodou. Při simulaci tohoto jevu dochází z jeho podstaty ke kavitaci, která nastává při extrémně nízkých tlacích. Jak již bylo popsáno výše, při zavírání spodního ventilu, dochází v oblasti nízkých tlaků k nestabilitě výpočetní metody. Dosažené výsledky tedy v počátku nestacionárního jevu neodpovídají naměřeným hodnotám.

### Parametry numerického modelu - zavírání dolního ventilu

Youngův modul pružnosti	$E = 0.7 \text{ GPa}$
Tlumení v materiálu trubice	$b = 0.6 \text{ MPa}\cdot\text{s}$
Courantovo číslo	$C = 0.99$
Počet uzlů	$N_x = 20$
Prostorový krok	$\Delta x = 3.0663 \text{ m}$
Časový krok	$\Delta t = 0.0094 \text{ s}$
Hmotností zlomek vzduchu	$M_{vz} = 8.1 \cdot 10^{-7}$

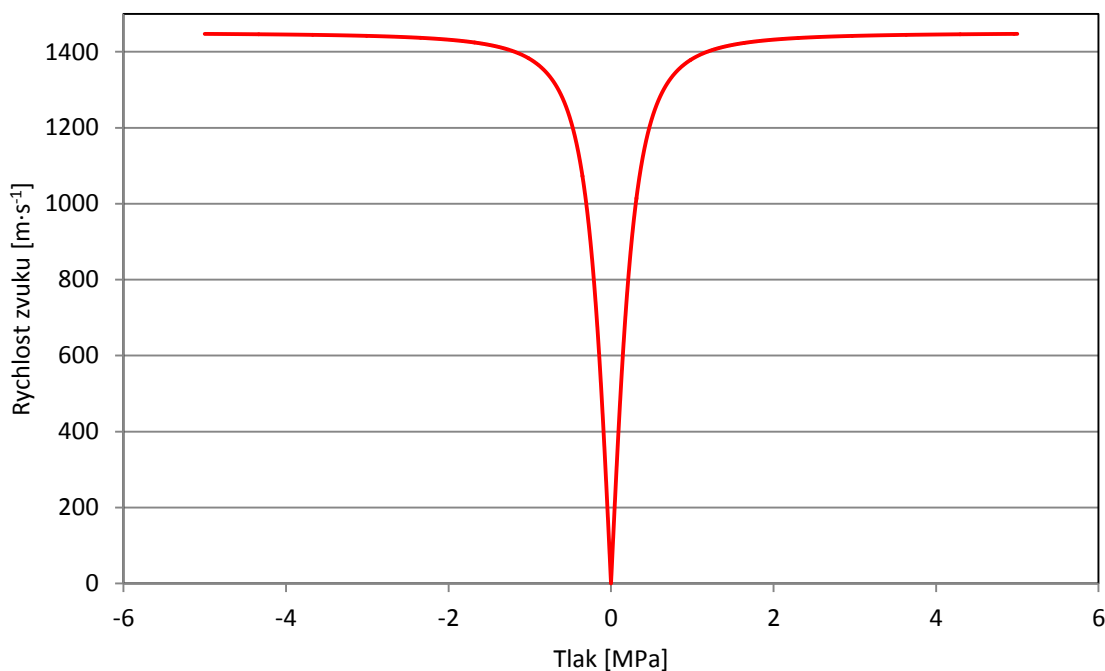


Graf 13 Závislost průtoku na čase v prvním uzlu



Graf 14 Průběh tlakových pulsací v čase při zavírání horního ventilu

Zavírání horního ventilu opět potvrdilo rozkmitání tlakových hodnot v oblasti tlaků blízkých nule. V tomto případě došlo k podkročení nulového tlaku, kdy první tlakový peak dosahuje záporné hodnoty kolem 2 barů. Takto vysoká záporná hodnota tlaku již způsobuje nefyzikální chování modelu kapalina-plyn, kdy rychlost zvuku pro záporné tlaky narůstá do vysokých hodnot. Tento jev je dobře patrný na Graf 15, který ukazuje závislost rychlosti zvuku, dané vztahem (3.10), na tlaku v nefyzikálním rozsahu hodnot. Zbylé proměnné vstupující do výpočtu rychlosti zvuku jsou převzaty ze simulace zavírání horního ventilu.



Graf 15 Rychlost zvuku v závislosti na tlaku

Díky tomu vzniká v numerickém modelu první peak, který ale nemá žádné fyzikální opodstatnění a jeho výskyt je čistě neduhem použitého matematického modelu. Tento jev ovšem potvrzuje stabilitu numerického schématu v záporných tlakových hodnotách, neboť hodnoty tlakových špiček dalších peaků již poměrně věrně odpovídají experimentálním datům.





## 8 Závěr

V rámci této práce je řešeno modelování tlakových pulsací v jednoduchém nevětveném potrubí pomocí modifikované metody charakteristik, která nemá pevně daný vztah mezi rychlostí šíření informací v systému, časovým a prostorovým krokem.

První část shrnuje odvození dvou základních rovnic – kontinuity a zákona zachování hybnosti. Rovnice kontinuity je uvažována s vlivem poddajného potrubí a vlivem tlumení v materiálu trubice [1]. Hybnostní rovnice je odvozena s vlivem tíhového zrychlení. Do matematického modelu je zahrnut vliv proměnné rychlosti zvuku v kapalině, která je ovlivněna především aktuální hodnotou tlaku a podílem vzduchu ve směsi voda-vzduch [6].

Pro potřeby numerického řešení je odvozena tzv. zobecněná metoda charakteristik. Tato metoda je principiálně shodná s běžně používanou metodou charakteristik, ale na rozdíl od ní nemá pevně předepsaný vztah mezi časovým a prostorovým krokem. Konstrukce této metody je postavena na numerickém schématu UPWIND, které ve svém odvození vychází z Taylorova rozvoje prvního stupně přesnosti v časové oblasti.

Výše popsaná metoda je v jedné z kapitol podrobena zkoumání vlivu hodnoty Courantova čísla na věrohodnost řešení. Dále je tato metoda použita pro řešení jednoduché úlohy vodního rázu. Parametry této úlohy, společně s řešením pomocí klasické metody charakteristik a schématu Lax-Wendroff, jsou převzaty z předcházející práce Ing. Koyše [11]. Ukazuje se, že velikost Courantova čísla má silný vliv na zatlumení přechodových jevů. Tlumení výše odvozené metody je při totožných Courantových číslech ještě výraznější než u běžně používaného schématu Lax-Wendroff.

V poslední části diplomové práce bylo provedeno experimentální ověření a odladění parametrů modelu. Díky použití reologického modelu při popisu materiálu trubice a vlivu obsahu vzduchu ve směsi voda-vzduch, vstupuje do modelu celá řada neměřitelných parametrů, jejichž hodnoty je nutno optimalizovat. Nevhodná kombinace parametrů tlumení či hmotnostního zlomku vzduchu může vést k nestabilitě výpočtu. Ukazuje se, že hodnoty tlumení nelze volit vyššího řádu než  $10^6$ , aniž by došlo k nestabilnímu chování matematického modelu. Oproti schématu typu Lax-Wendroff zobecněná metoda charakteristik vykazuje značně rozdílné chování v oblasti nízkých tlaků. Dojde-li při výpočtu pomocí metody Lax-Wendroff k překmitnutí do záporných tlaků, nastává okamžité zatlumení všech dalších pulzací [10]. Odvozené schéma naopak dokáže se zápornými tlakovými hodnotami pracovat, aniž by došlo ke zkreslení následných tlakových špiček.

Tato práce pokládá teoretický základ pro další zkoumání zobecněné metody charakteristik. Díky tomu, že je metoda charakteristik již dlouhou dobu dobře popsána a ověřena, existuje pro ni poměrně velké množství matematických modelů armatur, hydraulických strojů a dalších prvků vyskytujících se v potrubních systémech [8]. Námětem pro další výzkum může být aplikování zde odvozené zobecněné metody na komplexní hydraulické řady.



## 9 Seznam použité literatury

- [1] PANKO, Martin. *Tlumení tlakových pulsací v pružných potrubích*. Brno: Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství, 2008.
- [2] ŠEBESTA, J. *Stanovení dynamických vlastností plastových trubíc*. Brno, 2003.
- [3] MEDLÍK, J. *Modelování tlakových pulsací v pružných potrubích*. Brno, 2006.
- [4] WEINEROWSKA-BORDS, Katarzyna. Viscoelastic Model of Waterhammer in Single Pipeline – Problems and Questions. *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics* [online]. 2006, **2006**(53), 331–351 [cit. 2017-03-02]. Dostupné z: <http://www.ibwpan.gda.pl/docs/ahem/ahem53str331.pdf>
- [5] PÍRKO, Zdeněk a Jan VEIT. *Laplaceova transformace: základy teorie a užití v elektrotechnice*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1970, 245 s. ISBN -.
- [6] HIMR, Daniel, Vladimír HABÁN a František POCHYLÝ. Sound speed in mixture water - air. In: *Engineering Mechanics 2009*. Svratka: -, 2009, s. 393-401. ISBN -. ISSN -.
- [7] ŠOB, František. *Hydromechanika*. Druhé. Brno: Akademické nakladatelství CERM s.r.o, 2002, 238 s. : il. ISBN 8021420375.
- [8] ZÁRUBA, Josef. *Hydraulický ráz v soustavách potrubí*. Vyd. 1. Praha: Academia, 1984, 112 s. ISBN -.
- [9] REZZOLA, Luciano. *Numerical Methods for the Solution of Partial Differential Equations: Lecture Notes for the COMPSTAR School on Computational Astrophysics, 8-13/02/10, Caen, France* [online]. 1. Potsdam: Albert Einstein Institute, Max-Planck-Institute for Gravitational Physics, 2011 [cit. 2017-05-07]. ISBN -. Dostupné z: [www.aei.mpg.de/rezzolla](http://www.aei.mpg.de/rezzolla)
- [10] HIMR, Daniel. *Řešení nelineárních hydraulických sítí = Solution of non-linear hydraulic networks*. 2011, 2004, 57 l. 1 CD-ROM.
- [11] KOYŠ, Ján. *Modelování tlakových pulsací v pružných potrubích*. Brno, 2007. Diplomová práce. VUT Brno. Vedoucí práce Ing. Vladimír Habán, Ph.D.
- [12] OMAL Automation - Diagrams. *OMAL Automation* [online]. Rodengo-Saiano, Italy: -, 2017 [cit. 2017-05-21]. Dostupné z: <http://www.omal.it/eng/Products/Ball-valves/Brass-ball-valve/2-way-full-bore-threaded-ends2/Diagrams-breakaway-torque>



## 10 Seznam použitých symbolů a zkratek

Symbol	Jednotka	Popis
$A_1$	[-]	koeficienty kvadratické rovnice
$A_N$	[-]	koeficienty kvadratické rovnice
$b$	[Pa·s]	tlumení materiálu
$\mathbf{B}$	[-]	matice konstant
$B_1$	[-]	koeficienty kvadratické rovnice
$B_N$	[-]	koeficienty kvadratické rovnice
$c$	[m·s <sup>-1</sup> ]	rychlost proudění
$C$	[-]	Courantovo číslo
$C_1$	[-]	koeficienty kvadratické rovnice
$C_N$	[-]	koeficienty kvadratické rovnice
$D$	[m]	průměr trubice
$dx$	[m]	délkový rozměr
$E$	[Pa]	modul pružnosti v tahu
$e$	[-]	Eulerovo číslo
$F_g$	[N]	vektor tíhové síly
$F_p$	[N]	vektor plošných tlakových sil
$f_p$	[-]	účelová funkce
$F_s$	[N]	vektor setrvačných sil
$F_t$	[N]	vektor síly od smykového napětí na stěně
$g$	[m·s <sup>-2</sup> ]	tíhové zrychlení
$H$	[m]	spád trati
$h_h$	[m]	výška hladiny v horní nádrži
$k$	[Pa]	tuhost
$K$	[Pa]	objemový modul stlačitelnosti
$\mathbf{K}$	[-]	matice konstant
$k'$	[-]	počet časových kroků od počátku do aktuálního času
$K_s$	[Pa]	objemový modul stlačitelnosti směsi
$K_v$	[m <sup>3</sup> ·hod <sup>-1</sup> ]	průtokový součinitel
$K_{v_{max}}$	[m <sup>3</sup> ·hod <sup>-1</sup> ]	maximální průtokový součinitel
$K_{vz}$	[Pa]	objemový modul stlačitelnosti vzduchu
$K_w$	[Pa]	objemový modul stlačitelnosti vody
$l$	[-]	pravá strana rovnice kontinuity
$L$	[m]	délka potrubí
$L^{-1}$	[-]	zpětná Laplaceova transformace
$m_s$	[kg]	hmotnost směsi
$m_{vz}$	[kg]	hmotnost vzduchu
$M_{vz}$	[-]	hmotnostní zlomek vzduchu

$m_w$	[kg]	hmotnost vody
$M_w$	[-]	hmotnostní zlomek vody
$n_i$	[-]	vnější normálový vektor z povrchu kapaliny
$O$	[m]	obvod
$O_{vz}$	[-]	objemový zlomek vzduchu
$O_w$	[-]	objemový zlomek vody
$p$	[Pa]	tlak
$P$	[m <sup>2</sup> ]	povrch válce - plocha
$p_{stř}$	[Pa]	střední hodnota tlaku
$Q$	[m <sup>3</sup> ·s <sup>-1</sup> ]	průtok
$R$	[m]	poloměr trubice
$r$	[J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup> ]	specifická plynová konstanta
$R_{prvku}$	[m <sup>-4</sup> ]	odpor
$S$	[m <sup>2</sup> ]	plocha
$s$	[-]	parametr Laplaceovy transformace
$s'$	[-]	počet časových kroků
$t$	[s]	čas
$T$	[K]	termodynamická teplota
$T_{zav}$	[s]	doba zavírání ventilu
$V$	[m <sup>3</sup> ]	objem
$v_i$	[m·s <sup>-1</sup> ]	rychlost
$v_m$	[m·s <sup>-1</sup> ]	rychlost zvuku v materiálu trubice
$V_s$	[m <sup>3</sup> ]	objem směsi
$v_{stř}$	[m·s <sup>-1</sup> ]	střední rychlost zvuku v systému
$V_{vz}$	[m <sup>3</sup> ]	objem vzduchu
$v_w$	[m·s <sup>-1</sup> ]	rychlost zvuku v kapalině
$V_w$	[m <sup>3</sup> ]	objem vody
$v_{zv}$	[m·s <sup>-1</sup> ]	rychlost zvuku v médiu
$w$	[-]	vektor neznámých
$x_i$	[m]	prostorová souřadnice
$z$	[-]	vektor pravých stran
$\alpha$	[°]	úhle sklonu potrubí
$\Delta$	[m]	tloušťka stěny trubice
$\delta$	[-]	logaritmický dekrement útlumu
$\Delta p$	[Pa]	tlaková difference
$\Delta p_{ref}$	[Pa]	referenční tlak
$\Delta t$	[s]	časový krok
$\Delta x$	[m]	prostorový krok
$\varepsilon$	[-]	poměrné prodloužení
$\varepsilon \sim$	[-]	Laplaceův obraz prodloužení
$\kappa$	[-]	adiabatický exponent

---

$\lambda$	[-]	součinitel délkových ztrát
$\pi$	[-]	Ludolfovo číslo
$\rho$	[kg·m <sup>-3</sup> ]	hustota
$\rho_{ref}$	[kg·m <sup>-3</sup> ]	referenční hustota
$\rho_w$	[kg·m <sup>-3</sup> ]	hustota vody
$\sigma$	[Pa]	napětí
$\sigma^{\sim}$	[Pa]	Laplaceův obraz napětí
$\tau$	[s]	integrační proměnná
$\tau_0$	[Pa]	smykové napětí





## 11 Přílohy

- 1x CD obsahující elektronickou verzí práce ve formátu PDF a skript typu *m-file* s jednoduchým modelem řešeným zobecněnou metodou charakteristik.